DEN ANDEN SKANDINAVISKE MATEMATIKERKONGRES

BERETNING

OM

DEN ANDEN SKANDINAVISKE

MATEMATIKERKONGRES

I KJØBENHAVN 1911

UDGIVEN AF

NIELS NIELSEN
KONGRESSENS PRÆSIDENT

GYLDENDALSKE BOGHANDEL
NORDISK FORLAG
KJØBENHAVN 1912 KRISTIANIA

MED UNDERSTØTTELSE AF CARLSBERGFONDET

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & Co. (M. A. HANNOVER) KØBENHAVN

VED Afslutningen af den første skandinaviske Matematikerkongres i Stockholm, September 1909, traf man en foreløbig Aftale om, at den næste Kongres skulde søges afholdt i Kjøbenhavn to Aar senere.

Da den materielle Basis for Afholdelsen af en saadan Kongres var sikret gennem Tilskud fra Staten og Bidrag fra Private, og da Carlsbergfondet gav Tilskud til Trykning af Kongresberetningen, konstituerede følgende danske Matematikere sig som Kongresbestyrelse og Indbydere:

Docent ved Universitetet, Dr. *H. Bohr*.
Docent ved Landbohøjskolen, Dr. *C. Crone*.
Raadsformand, Dr. *J. P. Gram*.
Lærer ved Officerskolen, Dr. *Carl Hansen*.
Professor ved den polytekniske Læreanstalt, Dr. *P. C. V. Hansen*.
Professor ved Universitetet, Dr. *P. Heegaard*.
Professor ved den polytekniske Læreanstalt, Dr. *J. Hjelmslev*.
Telefoningeniør *J. L. W. V. Jensen*.
Professor ved den polytekniske Læreanstalt, Dr. *C. Juel*.
Direktør for Gradmaalingen, Generalmajor *V. H. O. Madsen*.
Professor ved Universitetet, Dr. *Niels Nielsen*.
Direktør for Forsikrings-A/S »Dan«, Dr. *H. Valentiner*.
Professor emeritus, Dr. *H. G. Zeuthen*.

Paa sit første Møde valgte Bestyrelsen Kongressens Præsidium:

Præsident: Professor, Dr. *Niels Nielsen*.
Sekretær: Dr. *Carl Hansen*.
Kasserer: Mag. sc. *C. R. Ette*.

Af Hensyn til Universitetsjubilæet i Kristiania i Begyndelsen af September 1911 besluttede man at afholde Kongressen i Dagene 28—31 August, hvilket ogsaa gennemførtes.

I Kongressen deltog i alt 93 skandinaviske Matematikere, nemlig:

Åkerman, N., Fil. stud. . . . . Lund.
Bäcklund, A. V., Professor, Dr. . . . . . Lund.
Bang, A. H., Mag. sc. . . . . Holte.
Bardenfleth, J. F. E., stud. jur. . . . . . Helsingør.
Bertelsen, N. P., Beregner . . . . Kjøbenhavn.
Birkeland, R., Professor, Dr. . . . . Trondhjem.
Bjerknes, V., Professor, Dr. . . . . Kristiania.
Block, H. G., Docent, Dr. . . . . Lund.
Bohr, Harald, Docent, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Bohr, Niels, Dr. Kjøbenhavn.
Borenius, G., Dr. . . . . Helsingfors.
Brodén, T., Professor, Dr. . . . . Lund.
Brun, V., Dr. . . . . Drøbak.
Bucht, G., Docent, Dr. . . . . Uppsala.
Burrau, C., Direktør, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Bøgh, F., Mag. sc. . . . . Kjøbenhavn.
Carstens, U., Adjunkt. . . . . Frederiksborg.
Charlier, C. V. L., Professor, Dr. . . . Lund.
Christiansen, C., Professor, Dr. . . . . . . Kjøbenhavn.
Crone, C., Docent, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Drachmann, A. B., stud. mag. . . . . . . Kjøbenhavn.
Eibe, Th., cand. mag., Frøken . . . . . . Kjøbenhavn.
Ekman, W., Professor, Dr. . . . . Lund.
Elvang, Fr., Mag. sc. . . . . Kjøbenhavn.
Engström, F., Observator, Dr. . . . . . . Lund.
Erlang, A. K., cand. mag. . . . . Kjøbenhavn.
Ette, C. R., Mag. sc. . . . . Kjøbenhavn.
Fredholm, I., Professor, Dr. . . . . Stockholm.
Goldman, H., Fuldmægtig, cand. mag. Kjøbenhavn.
Gram, J. P., Raadsformand, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Grauers, H., Lektor, Dr. . . . . Göteborg.
Gyllenberg, Fil. kand. . . . . Lund.
Hansen, Carl, Adjunkt, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Hansen, H. P. C., cand. mag. . . . . . . Kjøbenhavn.
Hansen, Jens . . . . Kjøbenhavn.
Hansen, P. C. V., Professor, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Heegaard, P., Professor, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Hintikka, A., Fil. mag. . . . . Helsingfors.
Hjelmslev, J., Professor, Dr. . . . . Kjøbenhavn.

Holmgren, E., Professor, Dr. .... Uppsala.
Iversen, L., Direktør, Dr. .... Kjøbenhavn.
Jensen, J. L. W. V., Telefoningeniør. Kjøbenhavn.
Jensen, V. A. C., cand. mag. .... Kjøbenhavn.
Jessen, J. L. W., Kommunelærer, cand. phil. .... Kjøbenhavn.
Johansson, S., Docent, Dr. .... Helsingfors.
Juel, C., Professor, Dr. .... Kjøbenhavn.
Kierboe, T., Mag. sc. .... Kjøbenhavn.
Kobbernagel, P. C. F., Assistent, cand. mag. .... Kjøbenhavn.
Koch, H. von, Professor, Dr. .... Djursholm.
Kristensen, S., cand. mag. .... Kjøbenhavn.
Krüger, C., cand. phil. .... Kjøbenhavn.
Kuylenstierna, N., Fil. kand. .... Växjö.
Lehmann, I., stud. mag., Frøken .... Kjøbenhavn.
Lindelöf, E., Professor, Dr. .... Helsingfors.
Lindström, S., Fil. kand. .... Nettraby.
Lund, H., cand. mag., Frøken ...... Kjøbenhavn.
Madsen, V. O. H., Generalmajor .... Kjøbenhavn.
Malmquist, J., Dr. .... Huddinge..
Mattson, R., Lektor, Dr. .... Vesterås.
Mikkelsen-Vendsyssel, A., Mag. sc. .. Kjøbenhavn.
Mittag-Leffler, G., Professor, Dr. .... Djursholm.
Mollerup, J., Dr. .... Kjøbenhavn.
Neovius, E. R., Professor, Dr. .... Kjøbenhavn.
Nevanlinna, L., Dr. .... Helsingfors.
Nielsen, Ali, cand. mag. .... Kjøbenhavn.
Nielsen, E. S., stud. math., Frøken .. Kjøbenhavn.
Nielsen, Niels, Professor, Dr. .... Kjøbenhavn.
Nørlund, Margrethe, Frøken .... Kjøbenhavn.
Oseen, C. W., Professor, Dr. .... Uppsala.
Palmquist, R., Fil. lic. .... Stockholm.
Pedersen, P. O., Docent, cand. polyt. Kjøbenhavn.
Petersen, Chr., Mag. sc. .... Kjøbenhavn.
Petrén, Louise, Dr., Frøken .... Lund.
Petrini, H., Lektor, Dr. .... Växjö.
Phragmén, E., Professor, Dr. .... Djursholm.
Pleijel, H., Docent, Dr. .... Uppsala.
Rosén, A., Lektor, Dr. .... Malmö.

Schou, E., Mag. sc. . . . . Kjøbenhavn.
Sjögren, S, Fil. mag. . . . . Borgleden.
Smith, Kirstine, cand. mag., Frøken . Kjøbenhavn.
Smith, O. A., cand. mag. . . . . Kjøbenhavn.
Steffensen, J. F., Seketær, cand. jur.. Kjøbenhavn.
Stephansen, Elisabeth, Dr., Frøken. . . Aas.
Stridsberg, E., Docent, Dr. . . . . Stockholm.
Strömgren, E., Professor, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Størmer, C., Professor . . . . Kristiania.
Svensson, B., Docent, Dr. . . . . Lund.
Tvermoes, Konferensraad . . . . Kjøbenhavn.
Valentiner, H., Direktør, Dr. . . . . Kjøbenhavn.
Wicksell, K., Professor, Dr. . . . . Lund.
Wicksell, Sven, Fil. stud. . . . . Lund.
Wiman, A., Professor, Dr. . . . . Uppsala.
Zeuthen, H. G., Professor, Dr. . . . . . . Kjøbenhavn.

Paa Grund af forskellige Omstændigheder blev det i sidste Øjeblik nødvendigt at foretage visse Ændringer i det udsendte Programudkast, saaledes at Kongressen afholdtes efter følgende Program:

Mandag den 28. August.

Kl. 10. Kongressen aabnedes. Indledningstale af Præsidenten, Professor *Niels Nielsen.*

Kl. $10^1/_2$. Dirigent: Professor *Nielsen.*

Professor *Zeuthen:* Præcisionsmathematikens Tilbliven fra Pythagoras til Euklid.

Kl. 2. Dirigent: Professor *Heegaard.*

Professor *Niels Nielsen:* Om analytiske funktioners udvikling i række efter hypergeometriske funktioner.

Professor *Oseen:* Om integralekvationernas betydelse för hydrodynamiken.

Professor *Bjerknes:* Grafisk algebra og grafisk differential- og integralregning.

Cand. mag. *O. A. Smith:* En Sætning om den homogene lineære Differentialligning af anden Orden, hvis Koefficienter er anden Grads Polynomier.

Kl. $7^1/_2$. Modtagelsessouper i den kgl. Yachtklubs Pavillon paa Langelinie.

Tirsdag den 29. August.

Kl. 10. Dirigent: Professor *Mittag-Leffler.*

Telefoningeniør *J. L. W. V. Jensen:* Undersøgelser over Ligningernes Theori I.

Professor *Hjelmslev:* Nye Undersøgelser over Geometriens Grundlag.

Professor *Heegaard:* Et Problem i Analysis situs.

Kl. 2. Dirigent: Professor *Wiman.*

Dr. *Malmquist:* Om ändligt mångtydiga integraler till algebraiska differentialekvationer af första ordningen.

Dr. *J. Mollerup:* Om Identiteten af den Fredholmske Determinant og en uendelig v. Koch'sk Determinant.

Professor *Charlier:* Den analytiska lösningen av banbestämningsproblemet.

Onsdag den 30. August.

Kl. 10. Dirigent: Professor *Bjerknes.*

Professor *Juel:* Om algebraiske og ikke-algebraiske Flader.

Docent *Pleijel:* Om telegrafistekvationen.

Docent *Bohr:* Om de Værdier, den Riemann'ske Funktion $\zeta(\sigma + it)$ antager i Halvplanen $\sigma > 1$.

Kl. 2. Dirigent: Professor *Størmer.*

Professor *Brodén:* Ett axiomsystem för den euklidiska geometrien.

Mag. sc. *E. Schou:* Nogle Klasser af harmoniske Funktioner med tre Variable.

Professor *Bjerknes:* Kraftfelt-fænomener i kontinuerlige materielle medier.

Professor *Lindelöf:* Om en af den danske språkforskaren Karl Werner angifven modifikation af förfarandet vid harmonisk analys af periodiska kurvor.

Docent *Block:* Lineära partiella differentialekvationer med multipla karakteristiker.

Torsdag den 31. August.

Kl. 10. Dirigent: Professor *Lindelöf.*

Lektor *Mattson:* Om en klass hela funktioner af irregulär tillväxt.

Professor *Neovius:* Om några af Riemann icke betraktade minimalytstycken, hvilkas begränsning bildas af tre räta linier.

Docent *Johansson:* Om konvergensen af de Poincaré'ska Θ-serierna i hufvudcirkelfallet.

Kl. $2^1/_2$ Dirigent: Dr. *Nevanlinna.*

Telefoningeniør *J. L. W. V. Jensen:* Undersøgelser over Ligningernes Theori II.

Kl. 6. Afskedsmiddag paa den kgl. Skydebane.

Af de 23 Kongresforedrag indeholder denne Beretning de 20, aftrykte i den Orden, hvori de holdtes, idet dog Telefoningeniør *Jensens* to Foredrag, for Sammenhængens Skyld, er trykte under et.

For de 3 andre Foredrags Vedkommende har Forfatterne kun ønsket en kort Redegørelse aftrykt i Beretningen.

INDLEDNINGSTALE VED AABNINGSMØDET.

AF

NIELS NIELSEN.

Deres Ekscellence! Deres Magnificence!

Højlærde og højtærede forsamling!

I tidsrummet 1839—98 holdtes der, med ulige store mellemrum, ialt 15 skandinaviske naturforskermøder, med sektion for matematik, vekselvis i Sverige, Norge og Danmark. Den, der kun kender disse møder gennem de eksisterende beretninger, faar det indtryk, at de maa være gaaet ind af mangel paa tilslutning; thi mod slutningen blev mellemrummene større.

Derfor maatte tanken om 11 aar senere at afholde en skandinavisk metematikerkongres paa forhaand synes dristig. Hvor skulde det være muligt efter saa kort tids forløb at afholde en kongres af skandinaviske matematikere alene, naar naturforskermøderne, der dog havde en langt bredere basis, ikke mere kunde trives! Ved selv den korteste oversigt over matematikens stilling i Skandinavien lige indtil vore dage kunde dette indtryk kun yderligere forstærkes.

Selv om det vel maa indrømmes, at matematiken gennem det 16de og 17de aarhundrede kun mere sporadisk blomstrede ved de store universiteter, saa er det dog utvivlsomt en kendsgerning, at denne videnskab i disse aarhundreder aldrig fandt noget brændpunkt ved de skandinaviske universiteter. I det 18de aarhundrede, da grunden til den moderne analyse lagdes, kom der vistnok fra Skandinavien ikke et eneste arbejde, der var af blivende betydning for denne mægtige lærebygnings rejsning.

Ved sydgrænsen, i Kiel, har *Friedrich Koës* vel i aaret 1729, i en lille note i *Acta Eruditorum*, angivet dobbeltintegralet til krumme

fladers komplanation. Stockholmerakademiet har publiceret adskillige arbejder vedrørende infinitesimalregningen, og i Sorø forsøgte *Jens Kraft* ved aarhundredets midte at bestemme rækkeudviklingerne efter potenser med brudne eksponenter for algebraiske funktioner. 1786 gav *Erland Samuel Bring* i Lund sin mærkværdige og fundamentale transformation af ligningen af femte grad, medens *Caspar Wessel* 1797 til Videnskabernes selskab i København indleverede sin teori for de komplekse tal.

Alt dette blev imidlertid uden betydning for den matematiske videnskabs almindelige udvikling. *Brings* opdagelse kom først til sin ret længe efter at *Jerrard* havde gjort den paany, og man blev først, ganske tilfældig, opmærksom paa *Wessels* prioritet hundrede aar efter hans arbejdes fuldendelse.

For omverdenen syntes *Abel* aabenbart at staa ganske isoleret i Skandinavien; matematikere som *Carl Ferdinand Degen*, *Carl Johan Hill*, *Christian Jürgensen* har sikkert været af stor betydning for deres nærmeste omgivelser; men for udlandet forsvandt de i *Abels* vældige slagskygge.

Selv om en *Malmsténs* arbejder ikke var upaaagtede, skete der dog først med den næste generation et virkeligt gennembrud. Vi har den ære her i vor kreds at have to af veteranerne fra dette gennembrud, nemlig professorerne *Zeuthen* og *Mittag-Leffler*; de to var blandt de første skandinaviske matematikere, efter *Abel*, der allerede i en ung alder fandt plads mellem de betydelige forskere, og de har stedse siden beholdt denne førerstilling hver paa sit omraade.

Et andet vidnesbyrd om, at der ved slutningen af det 19de aarhundrede var foregaaet en betydelig forandring til det bedre med matematikens stilling i Skandinavien, haves gennem det i 1882 af skandinaviske matematikere med *Mittag-Leffler* i spidsen grundlagte *Acta mathematica*. Vel kan dette tidsskrift kun i en vis forstand siges at være skandinavisk, idet den største del af dets forfattere vistnok er fremmede, og det kun har publiceret et mindretal af de arbejder, der i dets levetid er forfattede af skandinaviske matematikere. Men den høje anseelse, *Acta mathematica* nyder, vidner om den betydning, man i udlandet tillægger dets skandinaviske redaktører med *Mittag-Leffler* i spidsen.

Med alt dette for øje maatte forsøget paa en skandinavisk matematikerkongres paa forhaand betegnes som dumdristigt, selv om det udgik fra en *Mittag-Leffler* og støttedes af alle hans kolleger ved Sveriges universiteter og højskoler.

Ikke destomindre blev kongressen til virkelighed, og jeg tror, at enhver af deltagerne vil give mig ret, naar jeg siger, at denne kongres i enhver henseende blev en fuldstændig sejr. Derigennem leveredes der et haandgribeligt bevis for den mægtige matematiske udvikling, der i den allernyeste tid har fundet sted i Skandinavien.

Det var ikke desto mindre med nogen ængstelse, vi danske matematikere tænkte paa den næste kongres af denne art. I de forløbne to aar skete der store forandringer hos os. Vor prøvede fører, professor *Zeuthen*, trak sig tilbage; vi tre universitetslærere i matematik er ny i vore embeder; vi kunde have ønsket at se tiden lidt an endnu. Hertil kommer endvidere et moment af ikke ringe betydning: medens kongressen i Stockholm ivrig støttedes af lærerne i matematik ved Sveriges højere skoler, kunde vi her næppe gøre regning paa noget lignende. Tiden for denne kongres, umiddelbart efter det ny skoleaars begyndelse, maatte være en væsentlig hindring for lærernes almindeligere deltagelse. Dertil kommer endelig, at vi danske universitetslærere i matematik ikke i øjeblikket tør gøre regning paa synderlig popularitet blandt en del af den højere skoles lærere, nemlig blandt dem, der efter den ny skoleordnings ikrafttræden kæmper for et andet matematisk ideal end vort.

Naar vi ikke destomindre besluttede os til at vove forsøget, skyldes dette i første række professor *Heegaard*. Væsentlig gennem den støtte, han forstod at vinde fra forskellige sider, lykkedes det at realisere planen, at føre den anden skandinaviske matematikerkongres ud i livet.

Det er mig en kær pligt paa kongressens vegne at takke hver enkelt af dem, der har bidraget til kongressens virkeliggørelse:

Regeringen, repræsenteret af den fungerende kultusminister, Hs. Eksc. indenrigsminister *Jensen-Sønderup*.

Kultusministeriet, repræsenteret ved kontorchef *Dahl*, der fra første færd har omfattet vor kongres med den varmeste interesse.

Vort gamle, hæderværdige Universitet, der er repræsenteret ved sin rektor, professor *Erslev*, og som har stillet lokaler til vor raadighed.

Carlsbergfondets direktion, der er repræsenteret ved sin formand, professor *S. M. Jørgensen*, og som har sat os istand til at trykke de holdte foredrag i hvert fald i ret udførlige udtog.

De mange andre, som udenfor de egentlige kongresdeltagere er komne tilstede her idag for at give vort første møde et festligt præg.

Og endelig selve kongresdeltagerne, blandt hvilke vi jo finder de allerfleste af de betydeligere skandinaviske matematikere.

Jeg maa beklage, at vi savner professor *L. Sylow*, hvis høje alder ikke tillod ham den lange rejse, og professor *I. Bendixson*, der i sidste øjeblik, efter at kongressens program alt var trykt og omsendt, har maattet melde afbud, fordi hans embede som rektor ved Stockholms högskola for øjeblikket lægger saa stærkt beslag paa hans tid.

Paa grund af dette afbud er det første tirsdagsmøde bleven saa dansk.

Idet jeg paa indbydernes vegne erklærer den anden skandinaviske matematikerkongres for aabnet og byder Dem alle velkommen, skal jeg hertil knytte haabet om, at denne kongres maa bidrage sit til at højne matematiken i Skandinavien og knytte dens dyrkere nærmere sammen, saa at denne kongres maa efterfølges af mange andre.

Jeg tillader mig at foreslaa, at kongressen sender et saalydende telegram til professorerne *Sylow* og *Bendixson*:

Den anden skandinaviske Matematikerkongres fremsender sin hjærteligste Hilsen, dybt beklagende, at De ikke kan være nærværende.

Paa Kongressens Vegne

Niels Nielsen,

Præsident.

VED Modtagelsessouperen i Langelinies Pavillon afsendtes følgende Telegrammer:

Til

Kongen

Charlottenlund Slot.

Den anden skandinaviske Matematikerkongres, der i disse Dage afholdes i Kjøbenhavn, beder Deres Majestæt modtage den hjærteligste Tak for den gennem Professor Mittag-Leffler tilsendte Hilsen, idet Kongressen samtidig frembærer sin allerunderdanigste Hyldest.

Paa Kongressens Vegne

allerunderdanigst

Niels Nielsen,

Præsident.

Til

Hans Kongelige Højhed Kronprinsen

Stockholm.

Den anden skandinaviske Matematikerkongres, der i disse Dage afholdes i Kjøbenhavn, tillader sig at bringe Deres Kongelige Højhed sin allerunderdanigste Hyldest.

Paa Kongressens Vegne

allerunderdanigst

Niels Nielsen,

Præsident.

Herpaa indløb følgende Svar:

Professor *Niels Nielsen*

Universitetet, Kjøbenhavn.

Hans Majestæt Kongen beder Hr. Professoren bringe Deltagerne i den anden skandinaviske Matematikerkongres en hjærtelig Tak for den tilsendte Hilsen, som det glædede Hans Majestæt meget at modtage.

Efter allerhøjeste Befaling

Hakon Castonier,

adjutant du jour.

Nielsen, skandinaviske matematikerkongress

Köpenhamn.

Sänder matematikerkongressen mitt varma tack och hjärtliga hälsning.

Gustaf Adolf.

Fra Professorerne *Bendixson* i Stockholm og *Sylow* i Kristiania indløb følgende Svar paa de ved Aabningsmødet afsendte Telegrammer:

Professor *Niels Nielsen*

President för den andra skandinaviska matematikerkongressen

Köpenhamn.

Med största tacksamhet har jag mottagit Edert telegram. Djupt beklagande att ej få närvara vid Edra interessanta förhandlingar, ber jag Eder till kongressen uttrycka mina varmaste välönskningar för dess arbete, och min förhoppning om rikt vetenskapligt utbyte för densamma.

Ivar Bendixson.

Skandinavisk matematikerkongres

Kjøbenhavn.

Med dybtfølt tak for telegrammet udtaler jeg mine varmeste ønsker for kongressen og for dens udbytte og sender en hjertelig hilsen til hvert enkelt medlem.

L. Sylow.

Fra Hans Ekscellence Kultusministeren, der var paa Hjemrejse fra Færøerne, indløb endvidere følgende Telegram:

Matematikerkongressen

Kjøbenhavn.

Hilsen og Ønske om frugtbart Møde.

Appel.

KONGRESSENS VIDENSKABELIGE FORHANDLINGER

PRÆCISIONSMATHEMATIKENS TILBLIVEN FRA PYTHAGORAS TIL EUKLID[1].

AF

H. G. ZEUTHEN.

DEN forrige skandinaviske Mathematikerkongres blev indledet med et Foredrag af den fremragende Ophavsmand til disse Møder, Prof. *Mittag-Leffler*, om den nuværende Præcisionsmathematik, bygget paa Dannelsen af de hele Tal, saaledes som den er sat fuldkommen i System ved *Weierstrass*. Denne afløser en anden Præcisionsmathematik, hvis Nøjagtighed man nu let undervurderer, fordi den i den elementære og højere Undervisning jævnlig fremtræder i mere eller mindre tilfældige Brudstykker, men som af sine Bygmestere fra *Pythagoras* gjennem *Platon* og *Eudoxos* til *Euklid* var anlagt til at være fuldtud exakt. Den tager i Modsætning til det nysnævnte moderne System den kontinuert varierende Størrelse, fremstillet ved Længden af en ret Linie, til sit Udgangspunkt, gaar altsaa ud fra at betragte en saadan Størrelse som existerende. Paa Grund af denne Fremstillingsmaade er den geometrisk; men dens Figurer ere tillige bestemte til, som vore Formler, at give en vel defineret Fremstilling af Relationer mellem almindelige Størrelser. Vi kjende den bedst fra *Euklids* Elementer, der rigtignok saa maa læses i den Aand, hvori de ere skrevne, og hvorom de øvrige fra Oldtiden opbevarede Dokumenter give Vidnesbyrd. Omvendt er det kun ved grundig Indtrængen i *Euklids* Elementer, at man ret forstaar disse Dokumenter; men saa

[1]) Det samme Emne bliver behandlet i større Fuldstændighed og i Sammenhæng med Mathematikens hele Udviklingshistorie i den Fremstilling, som jeg giver af Mathematiken i Oldtid og Middelalder i det snart udkommende Bind om »Mathematik« af »Die Kultur der Gegenwart« (Teubner).

give de ogsaa et ret klart Indblik i, hvorledes det exakte mathematiske System, som foreligger i færdig Skikkelse hos *Euklid*, er blevet til.

Dannelsen af dette System begynder med *Pythagoras*, hvad der ingenlunde vil sige det samme, som at den mathematiske Viden begyndte med ham. Selve den pythagoræiske Læresætning var længe før hans Tid kjendt af Inderne. Om det særlig var noget af deres Viden, der var trængt frem til Grækerne, vide vi ikke; men i hvert Fald besad Grækerne ogsaa før *Pythagoras* adskillig praktisk mathematisk Viden. Et mathematisk System bliver først til, naar der foreligger et Materiale, hvoraf det kan dannes, og mere eller mindre vel begrundede Kundskaber, hvori det kan bringe Orden og Klarhed.

Udgangspunktet for Dannelsen af et saadant System var Opdagelsen af de irrationale Størrelser. Om denne skyldes *Pythagoras* selv eller en af hans Disciple, lader sig næppe afgjøre; thi allerede paa *Aristoteles'* Tid kunde man ikke sætte Skjel imellem, hvad der er fundet af de enkelte Pythagoræere. Denne Skole naaede imidlertid saa langt frem i en Udvikling, der tydelig peger tilbage paa det nævnte Udgangspunkt, og som selv maa have krævet nogen Tid, at den omtalte store Opdagelse i hvert Tilfælde maa skyldes de allerførste Pythagoræere, og da vel snarest selve den Mester, som disse satte saa højt. Studiet af de irrationale Størrelser er ogsaa strax sat i Forbindelse med den pythagoræiske Læresætning.

Pythagoræerne havde fra først af haabet at kunne lægge de hele Tal til Grund for Mathematiken. »Tingene ere Tal«, sagde de, og tillagde forskellige Taldannelser en mystisk Betydning. Deres Interesse for hele Tal maatte særlig styrkes ved den store fysiske Opdagelse, at Længderne af iøvrigt ens Strenge, som frembringe harmoniske Toner, forholde sig som simple hele Tal, og mere bestemt, at samme Talforhold mellem Strengenes Længder giver samme Toneinterval, saaledes Forholdet 2 : 1 et Interval paa en Oktav. Hypothetisk antog de da ogsaa ved andre Naturforklaringer simple Talforhold, og ved Udregninger af Kvadratrødder kunde det ikke tilfredsstille dem i Stedet for Brøker dannede af bestemte Tal kun at finde de for de foreliggende Anvendelser tilstrækkelige Tilnærmelser.

Til Brug af Kvadratrødder maatte allerede Musiken give Anledning. For at dele en Oktav, frembragt ved Strænge af Længderne 2 og 1, i to ligestore Dele, hvad det laa nær at forsøge, fik man Brug for en Streng med Længden $\sqrt{2}$. Denne Længde kunde tilvejebringes som Diagonal i et Kvadrat med Siden 1; men det maatte

strax vise sig, at den ved Siden af Strengene 2 og 1 gav Mislyd, et Forvarsel om Irrationaliteten af $\sqrt{2}$. Musikalsk Tilfredsstillelse fik man derimod af de Tilnærmelser til denne Mellemproportional mellem 1 og 2, som først tilbød sig. Middeltallet $\frac{3}{2}$ mellem 1 og 2 gav en Tone, hvis Intervaller fra dem, Strengene 1 og 2 giver, ere en Kvint og en Kvart. For at faa de samme Intervaller i omvendt Orden brugte man den harmoniske Mellemproportional $\frac{4}{3}$. Proportionen mellem disse eller de tilsvarende hele Tal $6:8 = 9:12$ kaldtes den musikalske, og Pythagoræerne tillagde den ogsaa i andre Henseender stor Betydning.

Den her paabegyndte Dannelse af Tilnærmelsesværdier til en Kvadratrod, der jo altid kan opfattes som en Mellemproportional, fik ogsaa Anvendelse i andre Tilfælde, og ved Gjentagelse af den samme Indskyden af Middeltal og harmonisk Mellemproportional mellem de ad denne Vej alt fundne Værdier kunde man naa en saa stor Tilnærmelse, som man vilde. For $\sqrt{2}$'s Vedkommende fik man en hurtigere Tilnærmelse i Værdierne $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12} \cdots$, hvis Tæller og Nævner y og x tilfredsstille Ligningen $y^2 - 2x^2 = \pm 1$, og stedse udledes af den foregaaende Brøks, y_1 og x_1, ved $y = 2x_1 + y_1$, $x = x_1 + y_1$. Herfor fører *Euklid* i II 9 og 10 geometriske Beviser, hvad der vidner om den Interesse, man endnu paa hans Tid bevarede for disse gamle Tilnærmelser.

Ad ingen af disse Veje kommer man til Ende og finder et nøjagtigt Udtryk for $\sqrt{2}$ som Forhold mellem hele Tal. Netop Pythagoræernes store Interesse for disse bragte dem da til at spørge, om et saadant Udtryk overhovedet er muligt. De fandt Svaret Nej, og begrundede det ved følgende Betragtning, som *Aristoteles* ofte omtaler, og som jeg her gjengiver med moderne Tegn. Var $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, hvor m og n ere indbyrdes primiske hele Tal, maatte man have $m^2 = 2n^2$, altsaa m være et lige og derfor n et ulige Tal. Sættes nu $m = 2r$, blev $2r^2 = n^2$, altsaa n lige. Det kan ikke paa en Gang være lige og ulige. Forudsætningen er altsaa umulig. Ganske sikkert har man i fuld Overensstemmelse hermed sluttet, at $\sqrt{3}$ er irrational, da ellers et Tal paa en Gang maatte være deleligt og ikke deleligt med 3, og paa lignende Maade behandlet Spørgsmaalet om andre Kvadratrødders Irrationalitet. At denne Begrungelse dog trænger til et Supplement, har man, som vi skulle se, senere bemærket.

Da nu ikke alle Størrelsesforhold kunde udtrykkes som Forhold mellem hele Tal, indsaa man dels, at der behøvedes andre Midler end Tal til Fremstilling af Størrelser, dels at saadan Begrundelse, som i

nogen Maade er bygget paa Regning, der jo netop forudsætter Fremstilling ved Tal, ikke er anvendelig paa alle Størrelser. Det nye paa alle Størrelser anvendelige Fremstillingsmiddel fandtes i Geometrien. I Stedet for at operere med $\sqrt{2}$ opererede man med Diagonalen i et Kvadrat, hvis Side er given, og den pythagoræiske Læresætning tillader en lignende Fremstilling af andre Kvadratrødder. De kontinuert varierende Størrelser fremstilledes i det hele ved Længder af rette Linier. Saadanne kunne adderes og subtraheres. I Stedet for deres Produkt betragtede man Størrelsen af det deraf dannede Rektangel. En som Rektangel fremstillet Størrelse divideredes med en given, ved at Rektanglet omdannedes til et nyt med denne til Side eller, som man sagde, lagdes langs den. Kvadratroden af en som Rektangel fremstillet Størrelse ab fremstilledes som Side i et Kvadrat af samme Størrelse og blev konstrueret ved den pythagoræiske Sætning, idet $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Overgangen mellem Fremstilling ved Længder og Arealer kunde ske gjennem Rektangler med Siden 1.

Med disse formelle Begrebsudvidelser forbandt man reelle Fremskridt, navnlig Løsningen af Ligninger af anden Grad, der ved Begrebsudvidelserne blev lige anvendelig paa irrationale og paa rationale Størrelser. Den nuværende algebraiske Løsning beror paa, at $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, og opnaas ved en saadan Omflytning af Leddene i Ligningen, at den ene Side, som indeholder den ubekjendte, antager denne Form, medens den anden er bekjendt. De anførte Formler fremtræde umiddelbart ved Deling af et Kvadrat med Siden $a + b$ eller a. En Ligning af 2. Grad fremtræder som den Opgave langs en given ret Linie at lægge et Rektangel med givet Areal saaledes, at der enten mangler et Kvadrat, eller et Kvadrat bliver tilovers, med andre Ord saaledes, at det overskydende eller manglende Stykke af Linien bliver ligestort med Rektanglets Højde (det saakaldte elliptiske eller hyperbolske Fladeanlæg). De Figurer, hvorved disse Opgaver tænkes løste, omdannes ved saadanne Omlægninger af deres Dele, som ganske svare til de nys omtalte Omflytninger af en algebraisk Lignings Led. Dertil knyttes, som vi nu gjør, Mulighedsbetingelser og Bestemmelsen af Størrelser, hvis Produkt (Rektangel) og Sum eller Differens have givne Størrelser. Figurerne spille her samme Rolle som det nuværende algebraiske Sprogs Formler. Ere Figurerne nøjagtig definerede, danne de et ligesaa exakt Organ for Algebraen som nu Tegnsproget, der først kommer op paa Højde med den antike Fremstilling, naar man udtrykkelig har forklaret, hvad der skal for-

staas ved Regning med irrationale Tal, en Operation, som Grækerne undgaa ved deres geometriske Omskrivning.

Den her beskrevne geometriske Algebra er fremsat i *Euklids* 2. Bog paa Grundlag af Sætningerne i 1. Bog. At Pythagoræerne vare komne saa vidt, fremgaar af, hvad der kom frem umiddelbart efter dem eller hos de sidste af dem. Det prægtige Stykke Geometri, som er opbevaret os i *Hippokrates*' Kvadratur af visse Halvmaaner, viser, at man var naaet til i Realiteten at beherske det meste af den elementære Geometri, og det Standpunkt, hvortil den formelle Behandling, som her særlig interesserer os, var naaet, træder frem i de Bestræbelser, som da særlig optog Mathematikerne. Man maatte have en bestemt og klar Angivelse af, hvorledes de Størrelser, som man vilde undersøge ved de geometriske Hjælpemidler, kunne fremstilles geometrisk. En saadan havde man allerede for Kvadratrødders Vedkommende. Opgaven om Terningens Fordobling eller Multiplikation, eller om, naar Kanten a i en Terning er given, at finde Kanten $a\sqrt[3]{m}$ i en m Gange saa stor Terning, gik ud paa at finde en tilsvarende Fremstilling af Kubikrødder. Den samme Opgave fik ogsaa en anden Skikkelse, som sluttede sig til den antike Fremstilling af Potenser ved Leddene i en sammenhængende Række Proportioner: $a:b = b:c = c:d \cdots$, eller, som vi nu sædvanlig sige, i en Kvotientrække: $(n+1)^{\text{te}}$ Leds Forhold til 1^{ste} Led er det samme som n^{te} Potens af andet Leds Forhold til 1^{ste}, detfe sidste Forhold altsaa som n^{te} Rod af det første. Uddragning af n^{te} Rod bliver altsaa det samme som Indskydning af $n - 1$ Mellemproportionaler, Kvadratrodsuddragning som Indskydning af 1, Kubikrodsuddragning af 2 Mellemproportionaler. Den sidste fremragende Pythagoræer, *Archytas*, søger at indskyde 2 Mellemproportionaler ved at benytte Kuglen paa en Maade, der svarer til Anvendelsen af Cirklen ved Bestemmelsen af 1 Mellemproportional. Det lykkedes ham at løse Opgaven ved Skjæring af Kuglen med en Kurve, der bestemmes som Skjæringslinie mellem en Omdrejningskegle og en Tore. Det siger sig selv, at man ikke derved bekvemt kunde faa en taalelig Tilnærmelse til den søgte Kubikrod. Saa godt regnede Grækerne sikkert, at de vare i Stand til ved numeriske Forsøg lettere at finde en bedre Tilnærmelse. Men det var noget andet, der tilsigtedes, nemlig at faa en geometrisk vel defineret Fremstilling af disse Størrelser og derved at sikre den geometriske Existens, som Anvendelsen af den geometriske Algebra krævede. Det var det samme og kun det, som snart efter opnaaedes ved den samme Opgaves Løsning ved Keglesnit.

Lignende Formaal havde Cirklens Kvadratur. Tilnærmede Bestemmelser havde man allerede fra Ægypterne, og søgte man ikke andet, havde der intet været at indvende mod *Antiphon*, der benyttede indskrevne Polygoner med voxende Sidetal. Hvad der derimod ikke var tilladt, var at betragte Existensen af Cirklens Areal som sikret ved den blotte Angivelse af, at den skulde være Grænsen for saadanne Polygoner. Da nu Forsøgene, saaledes *Hippokrates'*, paa at løse Opgaven ved ret Linie og Cirkel mislykkedes, tyede man til andre Kurver, som man næppe har lagt an paa at konstruere med særlig stor Nøjagtighed, men som vare vel definerede, nemlig Kvadratrix og *Archimedes'* Spiraler. Derved blev Cirklens Areal og Periferi ogsaa til vel definerede geometriske Størrelser. De samme Kurver kunde benyttes til Deling af en Vinkel i et hvilket som helst Antal ligestore Dele.

Pythagoræerne naaede dog ikke at tage alle Konsekvenser af deres Opdagelse af de irrationale Størrelser og paa alle Punkter at give ogsaa Behandlingen af disse Størrelser et fuldt exakt Grundlag. Deres geometriske Fremstilling omfattede vel disse, men de havde ikke noget exakt Udtryk for deres Forbindelse med de ved hele Tál og Brøker givne diskrete Størrelser. Dog vedblev man endnu at overføre Resultater vundne ved Behandling af diskrete Størrelser paa kontinuert varierende. Som nys berørt anvendte man saaledes Proportioner, hvis Theori foreløbig kun var bygget paa Forhold mellem hele Tal og altsaa ikke paa exakt Maade omfattede Forhold mellem inkommensurable Størrelser. Overgangen til saadanne synes Pythagoræerne at have villet støtte paa en Deling i uendelig mange uendelig smaa Dele. Denne træder frem deri, at de kaldte Punkter »Enheder med Beliggenhed« og altsaa deraf sammensatte Linier, Flader og Legemer som Flerheder. Forholdet mellem to Størrelser blev da Forholdet mellem de uendelige Antal af Punkter, de indeholdt.

Vi kjende nærmest denne Opfattelse gjennem den eleatiske Filosof *Zenon*, der i sin mod Pythagoræerne rettede Polemik viser, at »Tingene ikke ere Flerheder«, altsaa at man ikke kan naa fra Betragtning af det diskrete til det kontinuerte, altsaa heller ikke til den kontinuerte Bevægelse. *Paul Tannery* har i sin Bog »Pour la science hellène«, hvor han saa klart fremdrager de gamle, saakaldte Naturfilosoffers Tankegang, paa en slaaende Maade vist, hvorledes særlig de af *Zenons* Paralogismer, der vedrøre Bevægelse, gribe ind i hinanden og efterhaanden imødegaa de Indvendinger, som man fra modsat Side kunde forsøge at opstille mod de foregaaende. Vi skal her holde os til

Tannerys Forklaring af den sidste af disse Paralogismer. Den besvarer et Forsøg paa at imødegaa de foregaaende, hvori Bevægelsens Umulighed navnlig grundes paa, at Rummet kan deles i det uendelige, ved at henvise til, at det samme er Tilfældet med Tiden. For at vise Utilstrækkeligheden af denne Henvisning bemærker *Zenon*, at hvis Bevægelse overhovedet er mulig, maa der ogsaa existere Bevægelse med forskellig Hastighed. Dette bevises ved Henvisning til den relative Hastighed af Punkter, der bevæge sig med samme Hastighed i modsat Retning. Naar imidlertid Bevægelse af et Punkt skal bestaa i, at det passerer den uendelig lille Rumenhed i den uendelig lille Tidsenhed, Momentet, faar man kun en bestemt Hastighed.

Zenon har fuldkommen Ret i, at man ikke kan naa over til Sætninger om det kontinuerte fra Sætninger om det diskrete blot ved Brug af saadanne Ord som uendelig. En ny Forudsætning er nødvendig enten for, som vi nu gjøre, at definere det ved dette Ord betegnede Begreb, eller for, saaledes som de senere græske Mathematikere gjorde, at omgaa det. *Zenon* kjendte ingen saadan Forudsætning, og idet han ikke vilde anerkjende Existensen af andet, end hvad der var til for hans Tanke, nægtede han Kontinuitet og Bevægelse. Dette kunde de arbejdende Mathematikere ikke. De vedblev foreløbig at benytte de ufuldstændig begrundede Sætninger om Proportioner, og som senere Renæssancens Mathematikere, *Kepler* og *Cavalieri*, ja de fleste af Mathematikerne i det 18de Aarhundrede, arbejdede man indtil videre med et Uendelighedsbegreb, af hvilket man ikke gav nogen klar Bestemmelse. Det var saaledes, saa vidt man kan se, ved at dele en Pyramide eller en Kegle i uendelig mange, uendelig tynde Skiver, at *Demokrit* fandt, at den er Trediedelen af et Prisme eller en Cylinder med samme Højde og Grundflade. Denne Bevisførelse blev ikke godkjendt senere, men dog, som vi se hos *Archimedes*, brugt til at finde de Resultater, som man bag efter sikrede ved et Exhaustionsbevis, der netop benytter den samme Dekomposition, men tillige giver den Beviskraft. Saavel dette Bevis som en ny og exakt Proportionslære blev støttet paa en af *Eudoxos* opstillet Forudsætning, der afhjælper den af *Zenon* paaviste Mangel.

Eudoxos, *Platons* Samtidige og Medarbejder paa forskellige Omraader, har ikke altid været sat paa den høje Plads, som han fortjener i Videnskabens Historie. I Tillid til *Hipparch*, som paa hans Bekostning fremhæver de senere store Fremskridt i astronomisk Iagttagelse, have Astronomerne sat ham for lavt, indtil *Schiaparelli* af Beret-

ningerne om hans Lære om Planetbevægelserne har faaet den fine kinematiske Sammensætning af Rotationer frem, hvorigjennem han beskriver disse Bevægelser. Og Mathematikerne tillægge haardnakket *Archimedes* Opstillingen af den Forudsætning, som danner Grundlaget for hans Infinitesimalundersøgelse, skjønt netop *Archimedes* baade i Fortalen til Skriftet om Parablens Kvadratur omtaler den som forud kjendt og anvendt af *Euklid*, og i den for nylig fundne Methodelære tydelig peger hen paa *Eudoxos* som Ophavsmand. Denne Forudsætning gaar ud paa, at af to Størrelser, som overhovedet kunne sammenlignes, den ene kan gjentages saa tidt, multipliceres med et saa stort helt Tal, at Produktet bliver større end den anden. Den tillader, som det er gjort i *Euklid* V—VI, at bygge en exakt Proportionslære paa følgende Bestemmelse af to Forholds Ligestorhed eller Uligestorhed: $a:b = c:d$, naar m og n betegne vilkaarlige hele Tal, og $ma \gtreqless nb$ medfører $mc \gtreqless nd$, og $a:b > c:d$, naar der existerer Værdier af m og n, for hvilke $ma > nb$, men $mc < nd$. Som det ses, falder denne Bestemmelse ganske sammen med *Dedekinds* Snitmethode. Paa den nævnte Forudsætning ere ligeledes *Euklids* og *Archimedes*' Exhaustionsbeviser byggede.

Af de senere Forbedringer se vi, at ogsaa Pythagoræernes Opstilling af Irrationalitetsbegrebet og af Kjendetegn paa, om Størrelser ere irrationale, endnu vare noget usikre. *Theodor* fra Kyrene, der har Fortjenester af Overførelsen af den pythagoræiske Mathematik til Athen, opstillede derfor Begrebet Inkommensurabilitet. Som det, sikkert i Tilslutning til ham, læres i Begyndelsen af *Euklids* 10. Bog, lader det sig prøve, om to Størrelser ere kommensurable eller inkommensurable, ved paa dem at anvende den Operation, hvorved man søger største fælles Maal. Kommer man til Ende dermed, ere de kommensurable, men fortsættes den i det uendelige, ere de inkommensurable. Ad denne Vej lader det sig paavise, at Kvadratroden af et forelagt Ikke-Kvadrattal er inkommensurabel med Enheden; thi det vil som bekjendt vise sig, at den nævnte Operation, der er den samme som den, hvorved man vilde udvikle Roden i Kjædebrøk, bliver periodisk og altsaa aldrig kommer til Ende. Paa denne Maade — og vistnok kun paa den — forstaar man, at *Theodor* har ført særskilte Beviser for, at $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \cdots \sqrt{17}$ ere irrationale.

Dette sidste meddeles af *Platon* i hans Dialog: *Theaitet*, hvor vi tillige erfare, at *Theaitet* har ført almindelige Beviser for Rodstørrelsers Irrationalitet. De Mangler, man har fundet i den ældre pythagoræiske

Begrundelse, fremgaa tydelig af den Maade, hvorpaa de ere afhjulpne i *Euklids* 7. Bog, og som i sine Grundtræk tør antages at skyldes *Theaitet*. De Beviser, som følge i 8. Bog, for Irrationaliteten af en Rod af en uforkortelig Brøk, hvis Tæller og Nævner ikke begge ere Potenstal med samme Exponent som Roden, forberedes her ved en nøjagtig Undersøgelse af Tals Sammensætning af Faktorer. Her forekommer f. Ex. den Sætning, at, naar to uforkortelige Brøker ere ligestore, bliver Tæller lig Tæller, Nævner lig Nævner.

Den Interesse for mathematiske Undersøgelser af en yderst abstrakt Karakter, som træder os imøde i *Platons* Meddelelse om *Theaitet*, lægger han ogsaa for Dagen paa andre Steder. Det er da ogsaa i Kredsen af hans og *Eudoxos'* Disciple, at Præcisionsmathematiken arbejder sig frem mod den Skikkelse, som for den elementære Mathematiks Vedkommende foreligger fuldt færdig hos *Euklid*. De to Hovedvanskeligheder vare overvundne af *Eudoxos* og *Theaitet*; men en Præcisionsmathematik er overhovedet kun mulig i et System, hvor hver Sætning er bygget paa en foregaaende eller i sidste Instans paa Forudsætninger, som man udtrykkelig fastslaar. Paa Grund af den geometriske Form, som ogsaa den almindelige Størrelseslære havde antaget, maatte Sætningerne ikke blot være Læresætninger om de alt indførte Begreber; men disse Begrebers geometriske Existens maatte sikres ved nøjagtig angivne Konstruktioner. Disse føres hos *Euklid* i sidste Instans tilbage til saadanne, som praktisk udføres ved Lineal og Passer; men det er urigtigt at betragte Brugen af disse Instrumenter som Grundlag for den antike Geometri. Denne Brug vil jo ligesaa vel som numerisk Udregning af Rødder kun give tilnærmede Bestemmelser. Derfor nævner *Euklid* slet ikke disse Redskaber; men han giver i de opstillede Forudsætninger Oplysning om de Egenskaber ved ret Linie og Cirkel, som han maa forudsætte.

Disse Forudsætninger maa man nu ikke søge i de saakaldte Definitioner, som i Reglen blot indføre de Benævnelser, han vil gjøre Brug af. De Egenskaber, som nærmere skulle karakterisere de indførte Begreber, og som der bliver Brug for i de paafølgende Undersøgelser, opstilles derimod i de saakaldte Postulater. Her karakteriseres f. Ex. en ret Linies Beliggenhed ved den Egenskab, at den er bestemt ved to af dens Punkter, dens ubegrænsede Forlængelse postuleres, og der opstilles den tilstrækkelige Betingelse for, at to rette Linier i samme Plan skulle skjære hinanden til en bestemt Side o. s. v. Jeg vil ikke gaa i det enkelte, men skal kun bemærke, at man ved nøje at studere de af *Euklid* opstillede Forudsætninger og lægge Mærke til,

hvorledes han bruger dem, vil se, at han derved tilstræber det samme Formaal som de, der i vore Dage opstille det logiske Grundlag for Geometrien. De ere blot naaet videre paa den allerede af ham anviste Båne, nemlig ved ogsaa udtrykkelig at nævne Forudsætninger, som han har betragtet som saa selvfølgelige, at han har brugt dem uden at nævne dem. Dette gjælder saaledes Forudsætningerne om Ordningen af Punkter paa en ret Linie, og om lukkede Konturer i en Plan, som en Linie, der forbinder et indre med et ydre Punkt, altid maa skjære. Endelig findes det saakaldte Bevægelsespostulat eller Postulatet om, at der overhovedet gives kongruente Figurer, kun indirekte hos *Euklid*, idet et Axiom udtaler, at kongruente Figurer ere lige store. Endnu mindre bliver der da Tale om at opløse dette ret sammensatte Postulat i sine Enkeltheder.

I *Euklids* Geometri har den gamle Præcisionsgeometri naaet sin endelige Skikkelse. Umiddelbart gjælder dette dog kun for den elementære Geometri, den, der kan nøjes med Konstruktioner ved ret Linie og Cirkel, og som algebraisk talt omfatter Spørgsmaal, der afhænge af Ligninger af anden Grad; men den, der vilde gaa videre, saaledes som vi have set, at man var ogsaa før *Euklid*, maatte følge de samme Principer, som ere lagte til Grund for Opførelsen af Elementerne. Dette iagttager navnlig *Archimedes* med Hensyn til de nye Spørgsmaal, som han underkaster en streng mathematisk Undersøgelse. Han opstiller udtrykkelig Forudsætningerne for sin Statik og ligeledes de Forudsætninger, som ere nødvendige for at kunne tale om en krum Linies Længde; thi *Euklids* Elementer tilstede kun at sammenligne Længder af rette og brudte Linier eller af Buer af samme Cirkel indbyrdes. For Udmaalingen af krumme Linier eller Bestemmelsen af deres Forhold til rette Linier lægger han følgende to Forudsætninger til Grund: Den rette Linie er den korteste Vej mellem to Punkter, og: af to (krumme eller brudte, plane) Linier mellem 2 Punkter, der vende Konvexiteten til samme Side, er den yderste størst. Disse Forudsætninger definere, som vi nu sige, en krum Linies Længde, og at betragte den første som en ny Definition af en ret Linie, vilde staa i fuldkommen Strid med *Archimedes'* nøjagtige Tilslutning til *Euklids* Forudsætninger og med den Brug, han gjør af de nye Forudsætninger. Lignende Forudsætninger anvender han til at indføre Begrebet: en krum Flades Areal.

Jeg har her vist, hvorledes den antike Præcisionsgeometri er bleven til, og jeg har samtidig fremdraget flere af dens Hovedpunkter. Dette sidste har været nødvendigt, fordi man i de senere Aarhundreder

jevnlig har blandet det antike exakt geometriske Udgangspunkt og moderne arithmetiske Betragtninger, der foreløbig ikke altid kunde være exakte, sammen og har brugt *Euklids* Elementer til at lære Børn ikke den gamle strenge Videnskab, men en moderniseret Mathematik og da jevnlig sat en ydre Anskuelighed i Stedet for *Euklids* klart formulerede Begrundelser. Dette maatte give for ringe Tanker om det gamle System, som har faaet Skylden for de logiske Svagheder, der opstaa, naar man ikke tager et fast Udgangspunkt, nemlig *enten* det gamle geometriske, *eller* det moderne arithmetiske. I vor Tid, da man besidder en paa Arithmetik grundet Algebra, er man tillige tilbøjelig til at overse, at den græske Geometri er bestemt til ogsaa at omfatte algebraiske Undersøgelser.

OM ANALYTISKE FUNKTIONERS UDVIKLING I RÆKKE EFTER HYPERGEOMETRISKE FUNKTIONER.[1]

AF

NIELS NIELSEN.

§ 1. Historiske bemærkninger.

C. Neumann[2]) beviste i 1862, at enhver analytisk funktion $f(x)$, som er regulær indenfor en ellipse med brændpunkterne $(+1, 0)$ og $(-1, 0)$, i dette omraade kan udvikles i række efter kuglefunktioner af første art, nemlig

$$f(x) = a_0 P^0(x) + a_1 P^1(x) + a_2 P^2(x) + \cdots, \tag{1}$$

medens enhver analytisk funktion $F(x)$, som er regulær udenfor ovennævnte ellipse, i dette omraade kan udvikles i række efter kuglefunktioner af anden art, nemlig

$$F(x) = A_0 Q^0(x) + A_1 Q^1(x) + A_2 Q^2(x) + \cdots \tag{2}$$

Konvergensomraadet for enhver af rækkerne (1) og (2) afhænger altsaa alene af den funktion, der skal udvikles.

Disse sætninger af *Neumann* er af stor interesse, idet de, saavidt jeg ved, giver det første eksempel paa rækker, hvis led er analytiske funktioner, og hvis konvergensgrænse ikke er en cirkel, idet disse rækker ikke, som de *Bürmannske*, er simple transformationer af potensrækker og tillige skal kunne tjene til at fremstille alle funktioner, der er regulære i et bestemt omraade.

[1]) En udførligere fremstilling af disse undersøgelser vil blive publiceret i *Annales de l'Ecole Normale* i Paris.

[2]) Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach Kugelfunktionen erster und zweiter Art. Halle a. S. 1862.

I den henseende er de ligeledes af *C. Neumann*[1]) fundne rækkeudviklinger efter cylinderfunktioner af første art kun af mere sekundær interesse, idet deres konvergensgrænse altid er en cirkel.

I et brev til *Neumann* har jeg vist, hvorledes alle de nævnte rækker kan udvikles ud fra et almindeligt princip[2]), medens jeg i mit skrift om de generaliserede kuglefunktioner[3]) har almindeliggjort formlen (1), idet jeg har vist, at enhver funktion $f(x)$, der er regulær indenfor en ellipse med brændpunkterne (0, 0) og (1, 0), i dette omraade kan udvikles i en række af formen

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F(-n,\ \alpha + n,\ \beta,\ x),$$

hvor α og β er vilkaarlige parametre, idet β dog hverken maa være 0 eller negativ hel. Her afhænger konvergensomraadet altsaa ligeledes udelukkende af den funktion, der skal udvikles.

I mit ovennævnte skrift[4]) har jeg ligeledes generaliseret (2), idet jeg indfører funktionen

$$(4) \quad F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + s)\,\Gamma(\alpha_2 + n + s) \ldots \Gamma(\alpha_{p+1} + n + s)}{s!\,\Gamma(\beta_1 + n + s) \ldots \Gamma(\beta_{p-1} + n + s)\,\Gamma(\beta_p + 2n + s)} x^{n+s},$$

hvor $n \geqq 0$ er et helt tal, og hvor parametrene α_s og β_s er vilkaarlige, dog saaledes at 0 og negative hele værdier er udelukkede.

Enhver analytisk funktion $f(x)$ af den komplekse variable $x = \alpha + i\beta$, der er regulær i det indre af den lukkede kurve med ligningen

$$(5) \quad (\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\,\alpha}{a(a+1)} - \frac{\alpha^2}{a(a+1)} - \frac{(2a+1)^2\beta^2}{4a^2(a+1)^2} = 0, \quad a > 0,$$

kan i dette omraade udvikles i en række af formen

$$(6) \qquad f(x) = A_0 F_0(x) + A_1 F_1(x) + A_2 F_2(x) + \ldots;$$

konvergensomraadet for (6) afhænger derfor alene af den givne funktion.

[1]) Theorie der Besselschen Funktionen; Leipzig 1867. Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; 1868, p. 221—256. Mathematische Annalen. Bd. 3, p. 581—610; 1871.

[2]) Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. 61, p. 33—61; 1909.

[3]) Théorie des fonctions métasphériques, p. 175—177; Paris 1911.

[4]) Loc. cit. p. 169—172.

Her skal vi kort behandle andre rækkeudviklinger efter hypergeometriske funktioner. I dette øjemed indføres de $p+q$ parametre

(7) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q,$$

der blot skal vælges saaledes, at 0 og negative hele værdier er udelukkede; sættes for alle hele $n \geqq 0$

(8) $$A_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\Gamma(\beta_2+n)\ldots\Gamma(\beta_q+n)},$$

skal vi løse følgende opgaver:

Første problem: Sættes for alle hele $n \geqq 0$

(9) $$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_{n+s}}{s!} x^{n+s}, \quad p \leqq q+1,$$

skal enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x=0$, udvikles i en række af formen

(10) $$f(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots,$$

hvor koefficienterne a_s alle er uafhængige af x.

Andet problem: Sættes for alle hele $n \geqq 0$

(11) $$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} A_{n+s} x^{n+s}, \quad p \leqq q,$$

skal enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x=0$, udvikles i en række af formen

(12) $$f(x) = a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x) + a_2 G_2(x) + \ldots,$$

hvor koefficienterne a_s alle er uafhængige af x.

I de ovennævnte problemer spiller tilfældene $p \leqq q$ eller $p \leqq q-1$ kun en mere underordnet rolle; ti i dette tilfælde gælder rækkeudviklingerne (10) og (12) i det indre af konvergenscirklen for den potensrække, der for $|x|$ tilstrækkelig lille fremstiller $f(x)$[1]).

De ovennævnte rækker af *C. Neumann* efter cylinderfunktioner af første art, falder ind under denne art udviklinger.

Almindeligt problem: Man kunde søge at generalisere rækken (11), idet man i definitionerne for $F_n(x)$ erstatter $\alpha_r + n$ og $\beta_r + n$ med

[1]) Loc. cit. p. 165—168.

henholdsvis $\alpha_r + a_{n,r}$ og $\beta_r + b_{n,r}$, hvor elementerne i de $p+q$ talfølger

$$a_{0,r},\ a_{1,r},\ a_{2,r},\ \ldots,\ a_{n,r},\ \ldots,\quad 1 \leqq r \leqq p$$
$$b_{0,r},\ b_{1,r},\ b_{2,r},\ \ldots,\ b_{n,r},\ \ldots,\quad 1 \leqq r \leqq q$$

er hele, aldrig negative tal, saaledes at for alle r

$$a_{n+1,r} \geqq a_{n,r},\quad b_{n+1,r} \geqq b_{n,r}$$
$$\lim_{n=\infty} a_{n,r} = +\infty,\quad \lim_{n=\infty} b_{n,r} = +\infty.$$

Det er da aabenbart, at den i (6) angivne række faas som specielt tilfælde, idet man sætter

(13) $p = q+1;\ a_{n,r} = n,\ 1 \leqq r = p;\ b_{n,r} = n,\ 1 \leqq r \leqq q-1;\ b_{n,q} = 2n,$

medens (10) specielt erholdes, idet man for alle r sætter

(14) $$a_{n,r} = b_{n,r} = n.$$

I § 5 skal vi behandle endnu et specielt tilfælde af denne art; derved fremgaar det tydelig, at det saaledes nævnte almindelige problem rimeligvis er overordentlig vanskeligt.

§ 2. Almindelige metoder.

I mit ovennævnte skrift[1]) har jeg fremstillet en metode, som satte mig istand til fuldstændig at undersøge de i § 1 nævnte rækker (3) og (6) og i alt væsentlig tillige (10). Af hensyn til de øvrige i § 1 stillede opgaver maa denne metode imidlertid generaliseres lidt.

I dette øjemed vil vi ved M betegne et i x-planen beliggende areal med følgende egenskaber:

1°. M skal være begrænset af en enkelt lukket kurve, der omslutter $x = 0$, og saaledes at nedre grænse for de absolute værdier af radiivektorerne fra $x = 0$ til kurvens punkter ikke er 0.

2°. Betegner x en vilkaarlig til M hørende værdi, skal det være muligt at lægge en helt i M beliggende kontinuert kurve fra 0 til x.

Indføres den ny variable t, og gennemløber tx den i 2° nævnte kontinuerte kurve fra 0 til x, vil t gennemløbe en kontinuert kurve, der forbinder punkterne 0 og 1.

---

[1]) Loc. cit. p. 49—54.

Indføres dernæst de $2p$ parametre

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p,$$

der kan vælges ganske vilkaarlig, idet blot o og hele negative værdier er udelukkede, beviser man uden vanskelighed sætningen:

I. *Forudsættes en af de to potensrækker*

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n) \cdots \Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n) \cdots \Gamma(\beta_p + n)} a_n x^n$$

overhovedet at konvergere, har den anden samme egenskab; de to rækker har endvidere samme konvergensradius, og de ved rækkesummerne definerede analytiske funktioner $f(x)$ og $\varphi(x)$ forholder sig regulært i samme omraade M.

For at bevise denne sætning ved induktion, kan vi aabenbart antage $p = 1$; endvidere forudsætter vi, at potensrækken for $f(x)$ er konvergent med konvergensradius r.

Lad dernæst $C_{0,1}$ være en kontinuert kurve, der forbinder punkterne $x = 0$ og $x = 1$, uden at omslutte noget af disse punkter, og lad os endvidere antage $C_{0,1}$ uden sløjfer; da haves for

$$(2) \qquad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta - \alpha) > 0$$

under anvendelse af det første *Eulerske* integral

$$(3) \quad \int_{C_{0,1}} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} dt = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}.$$

Betegner dernæst x en fast værdi, saaledes at $|x| < r$, er det muligt at vælge kurven $C_{0,1}$ saaledes at rækken

$$f(xt) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (xt)^n$$

er ligelig konvergent, naar t gennemløber $C_{0,1}$; hertil kræves nemlig blot, at den kurve, xt samtidig beskriver, aldrig kommer udenfor cirklen med centrum i o og radius $|x|$.

Antages betingelserne (2) opfyldte, faas dernæst ved anvendelse af (3)

$$(4)\quad \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int\limits_{C_{1,0}} f(tx)\, t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1}\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)} a_n x^n;$$

potensrækken for $\varphi(x)$ konvergerer derfor, og dens konvergensradius kan aldrig være mindre end r.

Antages endvidere $f(x)$ regulær i omraadet M af ovennævnte beskaffenhed, og er x en vilkaarlig til M hørende værdi, kan kurven $C_{0,1}$ vælges saaledes, at integralet i (4) eksisterer; $\varphi(x)$ er derfor ogsaa regulær i M.

Er betingelserne (2) ikke mere opfyldte, maa der eksistere to saadanne positive hele tal p og q, at

$$(5)\qquad \Re(\alpha) > -p, \quad \Re(\beta-\alpha) > -q;$$

sættes dernæst

$$f_p(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + a_{p+2} x^{p+2} + \cdots,$$

ses det, at integralet

$$(6)\qquad \varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha+q)} \int\limits_{C_{0,1}} f_p(tx)\, t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha+q-1}\, dt$$

fremstiller en i omraadet M regulær funktion, og at man for $|x| < r$ altid har

$$(7)\qquad \varphi_{p,q}(x) = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n+q)} a_n x^n.$$

Ifølge (7) haves imidlertid for $q \geqq 1$

$$x D_x \varphi_{p,q}(x) + (\beta+q-1)\,\varphi_{p,q}(x) = \varphi_{p,q-1}(x),$$

og altsaa er funktionen $\varphi_{p,0}(x)$ og som følge deraf tillige $\varphi(x)$ selv en i M regulær analytisk funktion.

Den gennem potensrækkerne (1) udtrykte afhængighed mellem funktionerne $f(x)$ og $\varphi(x)$ betegner vi ved symbolet

$$(8)\qquad \varphi(x) = \delta_p(\alpha, \beta) f(x)$$

og altsaa haves, idet parametrene α og β ombyttes

$$(9)\qquad f(x) = \delta_p(\beta, \alpha)\, \varphi(x)$$

Tager man i ovenstaaende bevis funktionen $\varphi(x)$ til udgangspunkt, erholdes $f(x)$ ved (9), og vor sætning er derigennem fuldstændig bevist. Ligeledes er det umiddelbart indlysende, hvorledes man ved anvendelse af det krumlinede integral i (3) kan generalisere de i § XV af mit skrift om kuglefunktionerne givne sætninger.

Rækkevidden af den i (8) definerede operation i det tilfælde hvor $f(x)$ er en hypergeometrisk funktion, ligger ogsaa lige for.

Da flere simple rækkeudviklinger efter hypergeometriske funktioner, som vi senere faar anvendelse for, er saakaldte *Bürmannske* rækker, skal vi her kort omtale den af *Puiseux*[1]) i alt væsentlig givne teori for disse rækker. Denne teori findes f. eks. gengivet af *Schlömilch*[2]) og, aabenbart inspireret af ham, ligeledes af *Julius Petersen*[3]).

Antages potensrækken

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots \tag{10}$$

at have konvergensradien $r > 0$, og er $\varphi(x)$ en analytisk funktion, konvergerer rækken

$$A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 (\varphi(x))^2 + \cdots + A_n (\varphi(x))^n + \cdots \tag{11}$$

aabenbart henholdsvis ubetinget og ligelig i enhver del af x-planen, for hvilken henholdsvis

$$|\varphi(x)| < r, \quad |\varphi(x)| \leqq r - \delta, \tag{12}$$

hvor δ er en vilkaarlig lille positiv størrelse.

Er der flere indbyrdes adskilte dele af x-planen, for hvilke betingelserne (12) er opfyldte, vil rækken (11) i almindelighed fremstille forskellige funktioner i hver enkelt af disse dele.

Er α et nulpunkt for $\varphi(x)$, kan man altid om α afgrænse et omraade, begrænset af en enkelt kurve uden dobbeltpunkter, og saaledes at for alle x, tilhørende dette omraade, ulighederne i (12) er opfyldte.

Ved A vil vi betegne et omraade i x-planen, begrænset af en enkelt kurve K uden dobbeltpunkter og tilfredsstillende betingelserne:

1°. $\varphi(x)$ er regulær i A og har i dette omraade kun det ene nulpunkt $x = \alpha$, der er af første orden.

2°. Er x et vilkaarligt til A hørende tal, har ligningen $\varphi(y) = \varphi(x)$ ikke andre i A beliggende løsninger for y end $y = x$.

1) Journal de Mathématiques pures et appliquées, Bd. 15, p. 380—384; 1850.
2) Compendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 100—108; Braunschweig 1879.
3) Forelæsninger over Funktionstheori, p. 173—178; Kbhvn. 1895. Vorlesungen über Funktionstheorie, p. 157—161; Kbhvn. 1898.

3^0. I A haves stedse $\varphi'(x) \neq 0$.

Enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i A, kan da i dette omraade fremstilles ved en række af formen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (\varphi(x))^n, \tag{13}$$

hvor man aabenbart finder

$$A_0 = f(\alpha), \quad A_1 = \frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}; \tag{14}$$

almindelig haves

$$n!\, A_n = D_x^{n-1}\left(\left(\frac{x-\alpha}{\varphi(x)}\right)^n f'(x)\right)_{x=\alpha}. \tag{15}$$

Formlen (15) er det eneste os bekendte bidrag af *Bürmann* til en teori for de rækker, der bærer hans navn; denne formel er os endda kun overleveret i en rapport af *Lagrange* og *Legendre*[1]. *Bürmanns* afhandling er aabenbart aldrig bleven trykt, skønt ovennævnte rapport anbefalede det.

Schlömilchs udtalelse om beskaffenheden af *Bürmanns* undersøgelser virker derfor noget forbløffende, selv om de maaske nok er rigtige. Den *Bürmannske* formel (15) er iøvrig meget elegant bevist af *Petersen*.

Vi maa dog udtrykkelig bemærke, at rækken (13) meget vel kan have et *større* konvergensomraade end det ved de angivne betingelser bestemte; ja, at der kan eksistere rækkeudviklinger af denne art, selv om disse betingelser overhovedet ikke er opfyldte.

I de følgende undersøgelser benytter vi stedse betegnelserne

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots, \tag{16}$$

$$f(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\, \psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \tag{17}$$

og altsaa haves for alle n:

$$a_n = \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)\,\Gamma(\alpha_2 + n) \cdots \Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)\,\Gamma(\beta_2 + n) \cdots \Gamma(\beta_p + n)}\, b_n. \tag{18}$$

---

[1]) Mémoires de l'Institut, Bd. 2, p. 15; 1795.

§ 3. Løsning af det første problem.

For at løse den første af de i § 1 stillede opgaver gaar vi ud fra den *Bürmannske* række, som dannes af funktionen

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x}, \tag{1}$$

der i hele planen har det eneste simple nulpunkt $x = 0$. Sættes $x = \alpha + i\beta$, ser man, at de i § 2 nævnte betingelser er opfyldte for ethvert omraade $\Omega(r)$, for hvilket

$$\alpha^2 + \beta^2 < r^2((\alpha - 1)^2 + \beta^2). \tag{2}$$

For $r < 1$ bliver $\Omega(r)$ det indre af en vis cirkel, for $r = 1$ sammensættes $\Omega(r)$ af alle endelige x, for hvilke $\mathfrak{R}(x) < -\frac{1}{2}$, medens $\Omega(r)$ for $r > 1$ bliver den del af planen, der ligger udenfor en vis cirkel. Det er indlysende, at ethvert omraade $\Omega(r)$ maa indeholde punktet $x = 0$, og at intet saadant omraade kan indeholde punktet $x = 1$.

Enhver analytisk funktion $F(x)$, der forholder sig regulært i et omraade $\Omega(r)$, kan altsaa i dette omraade udvikles i en række af formen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x}{1-x}\right)^n, \tag{3}$$

hvor ifølge § 2, (15) $A_0 = F(0)$ og almindelig

$$n!\,A_n = D_x^{n-1}((1-x)^n F'(x))_{x=0} = D_x^n((1-x)^{n-1}F(x))_{x=0}. \tag{4}$$

Da den i den stillede opgave behandlede række ikke indeholder noget konstant led, maa vi transformere rækken (3), idet vi sætter

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{1-x}, \quad F(x) = (1-x)\psi(x);$$

i henhold til vore bemærkninger om, at $\Omega(r)$ ikke indeholder punktet $x = 1$, ses det umiddelbart, at $\psi(x)$ er regulær i ethvert saadant omraade, hvor $F(x)$ har denne egenskab, og altsaa haves sætningen:

I. *Enhver analytisk funktion $\psi(x)$, der er regulær i et omraade $\Omega(r)$, kan i $\Omega(r)$ fremstilles ved en række af formen*

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}, \tag{5}$$

og koefficienterne i denne række bestemmes ved udtrykket

$$n!\,A_n = D_x^n\left((1-x)^n \psi(x)\right)_{x=0}. \tag{6}$$

Anvendes potensrækken § 2, (16) for $\psi(x)$, erholdes ved (6)

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} b_{n-s}. \tag{7}$$

De i (3) og (5) fremstillede rækker, der iøvrig er betragtede mange gange tidligere, er blandt de faa *Bürmannske* rækker, hvis konvergensomraade altid bestemmes ved de i § 2 angivne betingelser.

Eksempel 1. Af (3) og (4) findes umiddelbart den i omraadet $\Omega(1)$ gyldige udvikling

$$(1-x)^{-\nu-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\nu}{n} \frac{x^n}{(1-x)^{\alpha+n}}. \tag{8}$$

Eksempel 2. Rækken

$$\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \tag{9}$$

er gyldig i omraadet $\Omega(4)$, altsaa i den del af x-planen, som ligger udenfor cirklen

$$(\alpha - \tfrac{4}{3})^2 + \beta^2 = \tfrac{4}{9}, \quad x = \alpha + i\beta. \tag{10}$$

Anvendes transformationen $\delta_p(\alpha, \beta)$, og sættes

$$F_n(x) = \delta_p(\alpha, \beta) \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

faas for alle n, idet $|x| < 1$

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s) \cdots \Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s) \cdots \Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s}, \tag{11}$$

og denne funktion er altsaa, bortset fra en simpel faktor, en hypergeometrisk funktion af højere orden. Den første parameter i $F_n(x)$ er ganske vist det hele tal n; men denne specielle form kan hæves, idet man f. eks. sætter $\beta_p = 1$.

Sætter man i (11) $p+1$ istedetfor p og $\alpha_{p+1} = \alpha$, $\beta_{p+1} = 1$, finder man for funktionen $\Phi_n(x)$ bestemt ved

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!}\Phi_n(x) = F_n(x) \tag{12}$$

følgende udtryk

$$\Phi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\alpha+n+s-1}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\cdots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\cdots\Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s}. \tag{13}$$

Er her specielt $p = 1$, og sættes $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \gamma$, erholdes

$$\Phi_n(x) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \cdot x^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x), \tag{14}$$

altsaa paa en simpel faktor nær en sædvanlig hypergeometrisk funktion.

Anvendes transformationen $\delta_p(\alpha, \beta)$ paa formlen (5) faas med betegnelserne § 2, (16) og (17) den almindelige sætning:

II. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, hvis tilsvarende transformerede*

$$\psi(x) = \delta_p(\beta, \alpha) f(x) \tag{15}$$

er regulær i et omraade $\Omega(r)$, kan i dette omraade udvikles i en række af formen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \Phi_n(x), \tag{16}$$

hvor $\Phi_n(x)$ er den i (13) definerede hypergeometriske funktion af højere orden.

Koefficienterne A_n i (16) bestemmes ifølge (7) og (12) ved udtrykket

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n-1}{s} \frac{\Gamma(\beta_1+n-s)\cdots\Gamma(\beta_p+n-s)}{\Gamma(\alpha_1+n-s)\cdots\Gamma(\alpha_p+n-s)} a_{n-s}. \tag{17}$$

Sættes $p = 1$, og kombineres formlerne (14) og (17), faas den speciellere sætning:

III. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, hvis tilsvarende transformerede $\psi(x)$ er regulær i et omraade $\Omega(r)$, kan i dette omraade udvikles i en række af formen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x), \tag{18}$$

hvis koefficienter bestemmes ved udtrykket

$$(19)\quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n-1}{s}\binom{\beta+n-1}{s} : \binom{\gamma+n-1}{s} \cdot a_{n-s}.$$

I mit skrift om de generaliserede kuglefunktioner[1]) har jeg kun behandlet den del af ovennævnte rækkeudviklinger, der svarer til omraader $\Omega(r)$, hvor $r \leqq 1$.

Anvendes transformationen $\delta_p(\alpha, \beta)$ paa den specielle formel (9), faas et eksempel paa rækker af ovennævnte art svarende til omraadet $\Omega(4)$.

Af den specielle formel (8) faas følgende ejendommelige rækkeudvikling

$$(20)\qquad F(\alpha+\nu, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x),$$

hvor, for alle n,

$$(21)\qquad A_n = \binom{\nu}{n}\binom{\beta+n-1}{n} : \binom{\gamma+n-1}{n};$$

denne række har konvergensomraadet $\Omega(1)$.

§ 4. Løsning af det andet problem.

For at løse den anden af de i § 1 stillede opgaver gaar vi ud fra den *Bürmannske* række svarende til funktionen

$$(1)\qquad \varphi(x) = x - x^2 = x(1-x),$$

der i hele x-planen har de to simple nulpunkter $x = 0$, $x = 1$, medens den afledede funktion

$$(2)\qquad \varphi'(x) = 1 - 2x$$

har det simple nulpunkt $x = \frac{1}{2}$, og ikke andre.

Den tilsvarende række

$$(3)\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x - x^2)^n$$

---

[1]) Loc. cit. p. 168.

er, tildels i en noget almindeligere skikkelse, undersøgt af de i § 2 nævnte forfattere: *Puiseux, Schlömilch* og *Petersen*; men disse undersøgelser er ufuldstændige.

Har potensrækken $\Sigma A_n x^n$ konvergensradien $r > 0$, konvergerer rækken (3) i omraadet $\Omega(r)$ bestemt ved betingelsen

$$(4) \qquad |x - x^2| < r;$$

dette omraade begrænses derfor af en *Cassinisk* ellipse $C(r)$ med brændpunkterne $(0, 0)$ og $(1, 0)$ og med ligningen i retvinklede koordinater

$$(5) \qquad (\alpha^2 + \beta^2)((\alpha - 1)^2 + \beta^2) = r^2, \quad x = \alpha + i\beta.$$

For $r > \frac{1}{4}$ bestaar $C(r)$ af en lukket gren uden singulære punkter, for $r = \frac{1}{4}$ er kurven en lemniskat med dobbeltpunktet $(\frac{1}{2}, 0)$, medens $C(r)$ for $r < \frac{1}{4}$ bestaar af to adskilte ovaler $O_1(r)$ og $O_2(r)$, der omslutter hver sit af brændpunkterne, nemlig henholdsvis $(0, 0)$ og $(1, 0)$.

I det følgende betegner $O(r)$ en vilkaarlig af disse ovaler, naar $r \leqq \frac{1}{4}$; for $r > \frac{1}{4}$ haves derimod de letforstaaelige ligninger

$$(6) \qquad O_1(r) = O_2(r) = C(r).$$

Om rækken (3) vil vi nu bevise følgende sætninger:

I. *Fremstiller rækken* (3) *samme funktion* $F(x)$ *i hele sit konvergensomraade* $\Omega(r)$, *maa* $F(x)$ *tilfredsstille funktionalligningen*

$$(7) \qquad F(1 - x) = F(x);$$

denne betingelse tilfredsstilles derfor altid af rækkesummen, naar i konvergensomraadet $\Omega(r)$ *konstanten* $r > \frac{1}{4}$.

Denne sætning er en umiddelbar følge af, at funktionen $x - x^2$ og konvergensomraadet $\Omega(r)$ bliver uforandrede, naar x erstattes med $1 - x$.

Antages $r \leqq \frac{1}{4}$, vil rækken (3) derimod i almindelighed fremstille to forskellige funktioner i de to adskilte dele af konvergensomraadet.

Eksempel 1. Af identiteten

$$(1 - 2x)^{2\nu} = (1 - 4(x - x^2))^\nu,$$

hvis to led for $x = 0$ skal antage værdien 1, faas ved anvendelse af binomialformlen den i det indre af ovalen $O_1(\frac{1}{4})$ gyldige række

$$(8) \qquad (1 - 2x)^{2\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\nu}{n} 2^{2n} (x - x^2)^n.$$

Sættes

$$\log(-1) = \pi i,$$

faas derimod i det indre af ovalen $O_2\left(\frac{1}{4}\right)$

$$(9) \qquad e^{-2\nu\pi i}(1-2x)^{2\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \binom{\nu}{n} 2^{2n}(x-x^2)^n.$$

II. *Enhver analytisk funktion* $F(x)$, *der tilfredsstiller funktionalligningen* (7), *og som er regulær i det indre af den Cassiniske ellipse* $C(r)$ *kan i hele dette omraade udvikles i en række af formen* (3).

Denne sætning bevises let, idet man udvikler højre side af identiteten

$$(10) \qquad \frac{1}{y-x} = \frac{1}{\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}-y\right)+\left(\frac{1}{2}-x\right)}{(y-y^2)-(x-x^2)}$$

efter potenser af $(x-x^2):(y-y^2)$, derpaa multiplicerer med $f(y)$ og anvender *Cauchys* fundamentalsætning[1]).

Det er aabenbart, at de i § 2 nævnte betingelser for omraadet A her kun kan tilfredsstilles naar A er en af ovalerne $O(r)$ svarende til $r \leqq \frac{1}{4}$, og altsaa haves sætningen:

III. *Enhver analytisk funktion* $\psi(x)$, *der er regulær i omegnen af et af punkterne* $x=0$ *eller* $x=1$, *kan udvikles i en række af formen*

$$(11) \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(x-x^2)^n,$$

og dennes konvergensomraade er det indre af den tilsvarende Cassiniske oval $O(r)$, *for hvilken i almindelighed* $r \leqq \frac{1}{4}$. *Et større konvergensomraade er kun muligt under de i* II *angivne betingelser.*

Vi bemærker, at denne sætning let bevises udfra identiteten (10) ved den ovenfor angivne fremgangsmaade.

Er $\psi(x)$ den i § 2, (16) definerede funktion, og er ovalen $O_1(r)$, faas ved § 2, (15) for koefficienter A_n i (11)

$$(12) \qquad A_0 = b_0, \quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s}\binom{n+s}{s} b_{n-s}.$$

[1]) Sammenlign behandlingen af rækken § 5, (5).

Eks. 2. Ved anvendelse af § 2, (15) faas umiddelbart den i det indre af ovalen $O_1(\frac{1}{4})$ gyldige rækkeudvikling

$$(13) \qquad (1-x)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\nu}{\nu+2n} \binom{\nu+2n}{n} (x-x^2)^n.$$

For at anvende operationen $\delta_p(\alpha, \beta)$ paa formlen (11) benytter vi stedse de i § 2, (16), (17) og (18) angivne betegnelser; sættes endvidere

$$\delta_p(\alpha, \beta)(x-x^2)^n = F_n(x),$$

findes for alle $n \geqq 0$

$$(14) \quad F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s},$$

medens koefficienterne A_n ved anvendelse af (12) og § 2, (18) antager formen

$$(15) \qquad A_0 = \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\beta_p)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_p)} a_0$$

og for $n \geqq 1$:

$$(16) \quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s} \binom{n+s}{s} \frac{\Gamma(\beta_1+n+s) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\beta_p+n+s)}{\Gamma(\alpha_1+n+s) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\alpha_p+n+s)} a_{n-s}.$$

Med disse betegnelser faas sætningen:

IV. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x = 0$, kan udvikles i en række af formen*

$$(17) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F_n(x),$$

hvis konvergensomraade er det indre af en Cassinisk oval $O_1(r)$, hvor almindeligvis $r \leqq \frac{1}{4}$. Kun i det tilfælde, hvor den til $f(x)$ svarende transformerede funktion $\psi(x)$ tilfredsstiller de i II *nævnte betingelser, kan ovennævnte konvergensomraade blive det indre af en Cassinisk ellipse $C(r)$, hvor $r > \frac{1}{4}$.*

Sættes specielt $p = 1$, $\alpha_1 = \beta$ og $\beta_1 = \gamma$, antager (17) formen

$$(18) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(-n, \beta + n, \gamma + n, x),$$

hvor $A_0 = a_0$, og for $n \geqq 1$

$$(19) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s} \binom{n+s}{s} \binom{\beta + n - 1}{s} : \binom{\gamma + n - 1}{s} \cdot a_{n-s}.$$

Eks. 3. Af (13) faas den i det indre af ovalen $O_1(\frac{1}{4})$ gyldige formel

$$(20) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(-n, \beta + n, \gamma + n, x),$$

hvis koefficienter bestemmes ved udtrykket

$$(21) \qquad A_n = \frac{\alpha}{\alpha + 2n} \binom{\alpha + 2n}{n} \binom{\beta + n - 1}{n} : \binom{\gamma + n - 1}{n}.$$

Vi kan ikke her gaa nærmere ind paa de af identiteten (10) dannede mærkelige rækkeudviklinger og deres egenskaber, men maa indskrænke os til at henvise til den udførligere fremstilling af nærværende arbejde.

Det er aabenbart, at disse rækker staar i nøje forbindelse med en klasse hele polynomier, som jeg har undersøgt ved anden lejlighed[1]).

§ 5. Bemærkninger om det almindelige problem.

For at behandle et andet specielt tilfælde af det i § 1 nævnte almindelige problem gaar vi ud fra en række af formen

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x^2}{1-x} \right)^n;$$

denne række kan ikke behandles efter den i § 2 angivne almindelige metode; ti her har udviklingsfunktionen $\varphi(x)$ et nulpunkt af anden orden i $x = 0$.

---

[1]) Nyt Tidsskrift for Matematik. Bd. 22, p. 73—85; 1911.

Har potensrækken $\Sigma A_n x^n$ konvergensradien $r > 0$, konvergerer rækken (1) henholdsvis absolut eller ligelig, eftersom henholdsvis

$$(2) \qquad \left|\frac{x^2}{1-x}\right| < r, \qquad \left|\frac{x^2}{1-x}\right| \leqq r - \delta,$$

hvor δ er en vilkaarlig lille positiv størrelse. Konvergensomraadet for rækken (1) er derfor det indre af den lukkede kurve $K(r)$ med ligningen i retvinklede koordinater

$$(3) \qquad (\alpha^2 + \beta^2)^2 - r^2((\alpha - 1)^2 + \beta^2) = 0, \quad x = \alpha + i\beta.$$

Man ser, at $K(r)$ kan dannes af den i § 4 betragtede *Cassiniske* ellipse $C(r)$, idet man istedetfor x sætter $1 : x$.

For $r < 4$ bestaar $K(r)$ af en enkelt lukket gren uden singulære punkter; for $r = 4$ er der et singulært punkt, nemlig dobbeltpunktet $(2, 0)$, hvis sløjfe omslutter $(1, 0)$. Antages endelig $r > 4$, er $K(r)$ sammensat af to ovaler, af hvilke den største $O(r)$ omslutter $K(4)$, medens den mindste $o(r)$ i sit indre indeholder punktet $(1, 0)$ og omsluttes af sløjfen hørende til dobbeltpunktet af $K(4)$.

Da $x^2 : (1 - x)$ ikke forandres, naar x erstattes med $x : (x - 1)$, har ifølge (2) kurven $K(r)$ og de to dele af planen begrænsede af $K(r)$ samme egenskab, og altsaa gælder sætningen:

I. *Enhver funktion $F(x)$, der kan udvikles i en konvergent række af formen* (1) *tilfredsstiller funktionalligningen*

$$(4) \qquad F\left(\frac{x}{x-1}\right) = F(x).$$

For at kunne vende denne sætning om og bevise eksistensen af visse almindeligere rækkeudviklinger vil vi gaa ud fra identiteten

$$\frac{1}{y-x} = \frac{y(1-x)+x}{(1-x)(1-y)} \cdot \frac{1}{\frac{y^2}{1-y} - \frac{x^2}{1-x}}$$

og den derved dannede rækkeudvikling

$$(5) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-y)^n}{y^{2n+1}} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-y)^n}{y^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}.$$

Gennemløber y en vilkaarlig kurve $K(r)$, er rækkerne paa højre side i (5) henholdsvis absolut eller ligelig konvergente baade med

hensyn til x og y, naar x er beliggende henholdsvis i det indre af $K(r)$ eller paa $K(r-\delta)$ og i dens indre, naar δ betegner en vilkaarlig lille positiv størrelse.

Lad nu $F(x)$ være en analytisk funktion, der er regulær i det indre af en vis kurve $K(r)$, og lad x betegne en fast værdi i det indre af $K(r)$; multipliceres i identiteten (5) med $F(y)$, og integreres langs en kurve $K(r')$ der omslutter x og saaledes at $r' < r$, faas følgende sætning:

II. *Enhver analytisk funktion $F(x)$, der er regulær i det indre af en kurve $K(r)$, kan i dette omraade udvikles i en række af formen*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}. \tag{6}$$

For koefficienterne i denne række giver ovennævnte metode let udtrykkene

$$(2n)!\, A_n = D_x^{2n}((1-x)^n F(x))_{x=0}, \quad (2n+1)!\, B_n = D_x^{2n+1}((1-x)^n F(x))_{x=0}. \tag{7}$$

Det ses umiddelbart, at rækken (6) ogsaa kan bringes paa formen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (B_n - A_n) \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}; \tag{8}$$

sættes endvidere

$$A'_0 = A_0, \quad A'_n = A_n + \tfrac{1}{2} B_{n-1},$$

faas desuden af (6)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A'_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n + \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n; \tag{9}$$

det er aabenbart, at rækkeudviklingerne (8) og (9) har nøjagtig samme konvergensomraade som (6).

Af II i forbindelse med formlen (9) faas umiddelbart den til I svarende omvendte sætning:

III. *Enhver analytisk funktion $F(x)$, der tilfredsstiller funktionalligningen* (4), *og som er regulær i omegnen af punktet $x = 0$, kan udvikles i en række af formen* (1).

Ifølge II kan $F(x)$ udvikles i en række af formen (9); sættes i denne række $x:(x-1)$ istedetfor x, erholdes

$$(10)\quad F\left(\frac{x}{x-1}\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A'_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n-\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

og altsaa haves, for alle n, $B_n=0$, naar $F(x)$ skal tilfredsstille (4).

Er $F(x)$ den i sætningen II betragtede funktion, og sættes

$$(11)\qquad \psi(x)=\frac{F(x)}{(1-x)^\alpha},\quad F(x)=(1-x)^\alpha\,\psi(x),$$

hvor α er et vilkaarligt kompleks tal, er $\psi(x)$ vel regulær i omegnen af punktet $x=0$, medens $x=1$ almindeligvis er et forgreningspunkt for denne funktion.

Det er imidlertid aabenbart, at de af (6) og (8) dannede rækkeudviklinger

$$(12)\qquad \psi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{x^{2n}}{(1-x)^{\alpha+n}}+\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n\frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}$$

$$(13)\qquad \psi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{x^{2n}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}+\sum_{n=0}^{n=\infty}(B_n-A_n)\frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}$$

har samme konvergensomraade som rækken i (6).

Da anvendelsen af den sædvanlige transformation paa rækkerne (12) og (13) ingen vanskelighed frembyder, skal vi, idet vi iøvrig henviser til den udførligere fremstilling af dette arbejde, indskrænke os til her at anføre følgende sætning som et af resultaterne af ovennævnte transformation:

IV. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x=0$, kan udvikles i rækker af formen*

$$(14)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha+n',\beta+n,\gamma+n,x)$$

$$(15)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n x^n F(\alpha+n'',\beta+n,\gamma+n,x),$$

hvor n' og n'' er de hele tal, der defineres ved betingelserne

$$\frac{n}{2} \leqq n' \leqq \frac{n+1}{2} \leqq n'' \leqq \frac{n+2}{2}. \tag{16}$$

Konvergensomraadet for disse rækker er det indre af den kurve $K(r)$, indenfor hvilken funktionen

$$(1-x)^{\alpha}\left(\delta_1(\gamma, \beta) f(x)\right) \tag{17}$$

forholder sig regulært.

Sammenholdes disse rækker med den i § 1 angivne udvikling (6), der ligeledes er et specielt tilfælde af den i det almindelige problem forekommende rækkeudvikling, synes det at fremgaa, at dette almindelige problem aabenbart er ret vanskeligt.

OM INTEGRALEKVATIONERNAS BETYDELSE FÖR HYDRODYNAMIKEN.

AV

C. W. OSEEN.

Det som jag i detta föredrag önskar redogöra för är ett par av de resultat, till vilka jag kommit under de två sista åren, och som jag tror vara av mera allmänt intresse. Jag måste förutskicka några anmärkningar. Hydrodynamiken är, som bekant torde vara, den del av mekaniken, som handlar om, eller åtminstone borde handla om vätskornas rörelser. I detta föredrag inskränker jag mig helt och hållet till de osamnantryckbara vätskorna. Det viktigaste faktum, som är bekant om dem, är följande. Man måste skilja på två slag av rörelser. Man har dels långsamma, regelbundna rörelser, detta är den hydrodynamiska rörelsefasen, dels oregelbundna, turbulenta rörelser, den hydrauliska rörelsefasen. De lagar man har för en vätskas rörelse äro vunna genom studiet av de långsamma, regelbundna rörelserna. Huruvida dessa lagar äro giltiga också för de turbulenta rörelserna, därom äro meningarne ännu delade, om än, efter min mening, den tidpunkt nu är kommen, då man kan slutgiltigt besvara frågan. Undrar man, hur meningarne kunna vara delade om en sådan sak, så är det tillräckligt att kasta en blick på de hydrodynamiska diff. ekv:na för att förstå en av anledningarne:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Den icke-lineära formen hos dessa ekvationer har gjort, att det som man vetat om deras lösningar ända till de sista åren varit ytterst

litet. Jag ställde mig för några år sedan den uppgiften att lyfta på den slöja, som vilade över dem. Den metod jag hade att använda torde vara klar för varje matematiker, som sysslat med de partiella diff: ekv:s teori. Jag måste först utelämna de icke-lineära termerna. Jag fick så ett lineärt system. Jag bestämde dettas grundlösningar. Med hjälp av dem överförde jag de hydrodyn. diff: ekv:na till ett system av integralekvationer. En av dessa har jag här uppskrivit.

$$4\pi\sqrt{\mu\pi}\,u(x, y, z, t) =$$

$$= \int\limits_{\infty} (u(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, u'_\xi + v(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, v'_\xi + w(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, w'_\xi)_{\tau=t_0}\, d\omega +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\infty} \left\{ (X + v\bar{w} - w\bar{v})_{\xi, \eta, \zeta, \tau}\, u'_\xi + \cdots \right\} d\omega$$

$$\bar{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots$$

Jag har därvid för enkelhetens skull begränsat mig till det fall, då vätskan fyller hela rummet. u'_ξ etc. är grundlösningen. Med hjälp av dessa integralekv. kunde jag därpa övergå till frågan om lösningarne till de fullständiga hydrodynamiska diff. ekv. Jag erhöll därvid ett resultat, som jag kan uttrycka så: Är i en oändligt utsträckt vätska rörelsen vid en tidpunkt regulär, så finns det alltid därefter ett visst tidsintervall, under vilket rörelsen likaledes är regulär. Det jag här vill understryka är, att det tidsintervall, för vilket denna sats kan bevisas, är ändligt. Det är detta, som varit utgångspunkten för mina följande undersökningar.

Om den tidrymd, under vilken rörelsen i en vätska är regulär, är ändlig, så måste man naturligtvis ställa sig den frågan: vad inträffar i det ögonblick, då den reguljära rörelsen upphör? M. a. o. vad är den fysiska betydelsen därav, att rörelsen upphör att vara regulär? En hypotes ligger här nära. Det finns två slag av rörelser, den hydrodynamiska och den hydrauliska. Den reguljära rörelsen hör uppenbarligen till det första slaget. Det ligger nära att uppställa den hypotesen, att det som inträffar, då rörelsen upphör att vara regulär, är, att rörelsen inträder i den hydrauliska fasen. Är denna hypotes riktig, så skulle man alltså ha hunnit så långt, att man på rent teoretisk väg återfunnit de båda slagen av rörelse. — Frågan var nu: finns det något medel att pröva hypotesen. Ett sådant medel erbjöd sig genast. Övergången från den hydrodynamiska till den hydrauliska

fasen kännetecknas därav, att virvlar uppträda i vätskan. Är hypotesen riktig, måste det alltså vara möjligt att visa, att i det ögonblick, då rörelsen upphör att vara regulär, en virvel uppstått. Jag föranleddes härav att undersöka de singulariteter, som kunna uppstå i en vätska. Jag skall icke ingå på undersökningens detaljer. Det är nog att nämna resultatet. Jag fann, att om i en oändligt utsträckt vätska rörelsen upphör att vara regulär, antingen förhållandena oändligt långt borta ändrats, eller någon av storheterna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ någonstädes blivit oändlig eller slutligen någon av dessa storheters derivator med avs. på x, y, z i någon punkt blivit oändlig. Är detta resultat det, som man borde vänta? Ja, till hälvten. Med den möjligheten, att förhållandena oändligt långt borta ändrats, behöver man icke befatta sig. Ett oändlighetsställe för $\bar{u}$, $\bar{v}$ eller $\bar{w}$ betyder, att virvelintensiteten blivit oändlig. Vi kunna då med fog säga, att en virvel uppstått. Så långt är allt gott och väl. Men det återstår en tredje möjlighet. Om den kan jag varken förneka existensen, ej heller ange dess fysikaliska betydelse. Jag måste då fråga mig: är det oundvikligt, att dessa oändlighetsställen för $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. skola betraktas som singulariteter i rörelsen. Man ser nu genast, att om man utgår från de hydrodyn. differentialekvationerna, detta i själva verket är oundvikligt. I dem ingå nämligen de andra derivatorna av u, v, w[1]). Inträffar det, att någon av kvantiteterna $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. blir oändlig, så måste samtidigt åtm. någon av dessa andra derivator bli oändlig. Utgår man från diff. ekv:na kan rörelsen i ett sådant fall omöjligt betecknas som regulär. Men man ser också, att det förhåller sig helt annorlunda, om man utgår från de hydrodynamiska integralekvationerna. I dem förekomma icke alls de partiella derivatorna av andra ordningen. Om dessa finnas och äro ändliga, det är från integralekv:nas synpunkt alldeles likgiltigt.

Den fråga jag härigenom föranleddes att ställa mig är följande: äro i hydrodynamiken de partiella diff. ekv. nödvändiga eller kan man gå förbi dem och direkt ur de fysiska grundhypoteserna härleda de hydrodyn. integralekv.? Här vill jag nu understryka, att detta problem uppträder icke blott i hydrodynamiken utan i den mat. fysikens nästan alla grenar. I nästan alla delar av den mat. fysiken

[1]) I ekv. för en sammantryckbar vätskas rörelser ingå alla derivator av andra ordn. av u, v, w m. a. p. x, y, z.

är gången den, att man först uppställer diff. ekv. och sedan ur dem härleder integralekv. Så t. ex. föres man i elektrostatiken till det problemet att bestämma en funktion φ sådan att för varje sluten yta S och det därav begränsade rummet ω gäller:

$$\int_S \frac{d\varphi}{dn} dS = -4\pi \int_\omega \rho d\omega. \tag{1}$$

Det traditionella sättet att lösa detta problem är att ur (1) genom en gränsövergång, varvid man förutsätter existensen av funktionen φ:*s* andra derivator, härleda diff: ekvationen:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{2}$$

Ur (2) erhåller man därpå med hjälp av *Greens* satser:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{\omega'} \rho \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \left\{\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS. \tag{3}$$

Man kan nu i alla dessa fall ställa sig den frågan: Äro differentialekv:na nödvändiga? Kan man icke gå förbi dem och direkt härleda integralekv:na? Kan man icke t. ex. komma från 1 til 3 utan att införa i räkningen de andra derivatorna?

Tiden medger mig icke att gå in på sakens detaljer. Jag måste nöja mig med att uttala resultatet. Svaret på frågan är jakande. Diff: ekv:na äro i själva verket överflödiga. — Jag vill däremot stanna ett ögonblick vid den frågan. Vad vinner man genom denna metod? Jag vill framhålla två punkter. Vad iakttagelsen kan ge är alltid i första hand integralrelationer, eftersom man aldrig kan iakttaga en i rum och tid isolerad punkt. Det den moderna matematiska behandlingen slutligen ger är återigen integralrelationer. Det är då ett framsteg i metodernas renhet att hela tiden operera med integralrelationer i st. f. differentialrelationer. Men vidare och huvudsakligen: det är ett väsentligt framsteg i enkelhet att gå förbi diff: ekv:na. För att se det behöver man blott betrakta det exempel jag nyss uppskrivit. Följer man den traditionella vägen har man efteråt den plikten at undersöka, huruvida:

$$\int \rho \frac{d\omega}{r}$$

verkligen har derivator av andra ordningen, som uppfylla ekv. 2. Det är bekant, vilken lång rad av subtila undersökningar denna fråga

framkallat. Det sista betydande bidraget härrör som bekant från lektor *Petrini*, som väl kan sägas ha bragt frågan till avslutning. Det resultat, som framgått av dessa undersökningar, är, att för de andra derivatornas existens det fordras, att funktionen ρ utom kontinuitet har vissa andra, komplicerade egenskaper. Följer man däremot den väg jag föreslår, så träder i stället för frågan, om ekv. 2 är uppfyld, den, om ekv. 1 är uppfylld. Härför är kontinuitet hos funktionen ρ ett, icke nödvändigt, men väl tillräckligt villkor. Frågan om de andra derivatornas existens förlorar sitt matematiskt-fysiska intresse.

Jag går tillbaka till det hydrodynamiska problemet. Har man rätt att utgå från integralekv:na, så erhåller man lätt följande resultat. Om rörelsen upphör att vara regulär, så har någonstans i vätskan en virvel uppstått. Sammanställer man nu det man experimentellt vet om de två olika slagen av rörelse och om övergången från det ena slaget till det andra med dessa resultat av den matematiska analysen, så tror jag, att det är omöjligt att undgå den slutsatsen, att skilnaden mellan den hydrodynamiska rörelsefasen och den hydrauliska i själva verket är den, att de förstnämnda rörelserna äro rörelser utan singulariteter, de sistnämnda rörelser med singulariteter. Då jag uttalar detta, tror jag mig vara i överensstämmelse med prof. *Boussinesq*[1]).

Godkännes den nyss dragna slutsatsen, så vill jag därav draga en slutsats beträffande hydrodynamikens framtida utveckling. Vilka problem är hydrodynamiken överhuvud i stånd att lösa? Man kan uppdela alla hydrodynamiska problem i tre grupper. Den första omfattar alla rörelser hörande till den hydrodynamiska fasen. Problemet att beräkna dem är enligt min mening principiellt löst. En och annan fråga återstår, men det är otvivelaktigt, att dessa frågor kunna besvaras. I motsats häremot betraktar jag problemet att beräkna de hydrauliska rörelserna såsom olösbart. Man måste betänka vilka svårigheter man möter, om man vill numeriskt beräkna en vanlig analytisk funktion med blott någorlunda komplicerade singulariteter. Men här har man att göra, icke blott med singulära punkter utan dessutom med singulära kurver och ytor. Och dessa singulariteter förändras med tiden, uppkomma och försvinna. Att även i de gröfsta dragen beräkna en sådan rörelse ur de hydrodyn. diff: ekv:na eller de motsvarande integralekv:na förefaller mig ogörligt. Återigen tror

---

[1]) Jmf. *A. Boulanger*, Hydraulique générale, Doin et fils 1909. Jmf. också dr. *Kármáns* sköna uppsats: Über die Turbulenzreibung verschiedener Flüssigkeiten, Phys. Zeitschr. 1911 S. 283.

jag mig här befinna mig i överensstämmelse med prof. *Boussinesq*. — Mellan de båda nänmda slagen av rörelse finns en tredje, rörelser med regelbundna singulariteter. Till detta slag hör en hel rad av teoretiskt och praktiskt viktiga fall. Om dessa rörelser är ännu mycket litet bekant. Här är det område, där enligt min mening, hydrodynamiken har att sätta in. Jag upprepar och jag understryker det: det är dessa problem, som kunna lösas. Den tanken däremot, att man ur de hydrodynamiska differential- eller de motsvarande integral-ekvationerna skulle kunna beräkna så komplicerade rörelser, som de flesta av dem, som förekomma i naturen, den vilar enligt min mening på ett misskännande av dessa ekvationers analytiska natur.

GRAFISK ALGEBRA OG GRAFISK DIFFERENTIAL- OG INTEGRALREGNING.

AF

V. BJERKNES.

ANGAAENDE dette foredrag henvises til kapitlerne »Graphical Algebra« og »Graphical Differentiation and Integration« i »Dynamic Meteorology and Hydrography by *V. Bjerknes* and different Collaborators, Part II, Kinematics«, Carnegie Institution of Washington, Publication Nr. 88. Washington. 1911.

EN SÆTNING OM DEN LINEÆRE HOMOGENE DIFFERENTIALLIGNING AF ANDEN ORDEN, HVIS KOEFFICIENTER ER ANDEN GRADS POLYNOMIER.

AF

O. A. SMITH.

IDET vi til Udgangspunkt tage følgende lineære, homogene Differentialligning af 2^{den} Orden

$$f(t)\, T^{(2)} + \varphi(t)\, T^{(1)} + \psi(t)\, T = 0$$

hvor $f(t)$, $\varphi(t)$ og $\psi(t)$ i et vist fælles Arealkontinuum ere analytiske Funktioner af t alene, og $T^{(p)} = \frac{d^p T}{dt^p}$, betragte vi følgende Integral

$$y = \int_\alpha^\beta e^{tx} \cdot T \cdot \Phi(t)\, dt$$

og ønske saa at finde den Differentialligning, som y tilfredsstiller, idet vi ville disponere over $\Phi(t)$ samt Grænserne α og β, der ikke indeholde x, paa en saadan Maade, at den søgte Differentialligning bliver saa enkel som mulig.

I den Hensigt gaa vi ud fra Identiteten

$$t^2 = (t-\alpha)(t-\beta) + (\alpha+\beta)\, t - \alpha\beta$$

og faa da strax

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\alpha+\beta)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y + \int_\alpha^\beta e^{tx}\, T\, \Phi(t)\,(t-\alpha)(t-\beta)\, dt.$$

Anvendes delvis Integration gentagne Gange og bortskaffes samtidig $T^{(2)}$ ved Hjælp af den givne Differentialligning, faas

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left((\alpha+\beta)-\frac{2}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\alpha+\beta}{x}-\alpha\beta\right)y-\frac{1}{x^2}\int_\alpha^\beta e^{tx}\Phi(t)\frac{\varphi(t)}{f(t)}T^{(1)}(t-\alpha)(t-\beta)dt-$$

$$-\int_\alpha^\beta e^{tx}\,\Phi(t)\frac{\psi(t)}{f(t)}\,T(t-\alpha)(t-\beta)\,dt+\frac{1}{x}\int_\alpha^\beta e^{tx}\,T^{(1)}\,\Phi^{(1)}(t)\,(t-\alpha)(t-\beta)\,dt+$$

$$+\frac{2}{x^2}\int_\alpha^\beta e^{tx}T^{(1)}\,\Phi(t)\,t\,dt-\frac{\alpha+\beta}{x^2}\int_\alpha^\beta e^{tx}T^{(1)}\Phi(t)\,dt-\frac{1}{x}\int_\alpha^\beta e^{tx}T\Phi^{(1)}(t)(t-\alpha)(t-\beta)\,dt.$$

Vi kunne nu samle de Integraler, der indeholde $T^{(1)}$ under Integraltegnet til ét og *bestemme* $\Phi(t)$ *saaledes, at dette Integral falder bort.*
Vi finde da

$$\Phi(t)\cdot\frac{\varphi(t)}{f(t)}(t-\alpha)(t-\beta)-\Phi^{(1)}(t)(t-\alpha)(t-\beta)-2\cdot\Phi(t)\cdot t+(\alpha+\beta)\Phi(t)=0$$

hvoraf

$$\Phi(t)=\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)}\,e^{\int\frac{\varphi(t)}{f(t)}dt}$$

medens $\frac{d^2y}{dx^2}$ bestemmes ved

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y-\frac{1}{x^2}\int_\alpha^\beta e^{tx}\,\Phi(t)\frac{\psi(t)}{f(t)}\,T(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-$$

$$-\frac{1}{x}\int_\alpha^\beta e^{tx}\,\Phi(t)\frac{\varphi(t)}{f(t)}(t-\alpha)(t-\beta)\,dt.$$

Særlig Interesse faar her det Tilfælde, hvor $f(t)$, $\varphi(t)$ og $\psi(t)$ ere 2den Grads Polynomier i t, idet vi da kunne udlede en Sætning, som er i høj Grad karakteristisk for denne Klasse Differentialligninger. Gaa vi nemlig ud fra Differentialligningen

$$(1)\quad (a_2t^2+a_1t+a_0)\,T^{(1)}+(b_2t^2+b_1t+b_0)\,T^{(1)}+(c_2t^2+c_1t+c_0)\,T=0$$

hvor $a_2\neq 0$ og lade vi α og β være Rødder i Ligningen

$$a_2t^2+a_1t+a_0=0$$

giver ovenstaaende Udtryk for $\frac{d^2y}{dx^2}$ umiddelbart den søgte Differentialligning

$$(2)\quad (a_2x^2+b_2x+c_2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x^2+b_1x+c_1)\frac{dy}{dx}+(a_0x^2+b_0x+c_0)\,y=0$$

som ikke alene er af samme Type som (1), *men som er dannet af denne ved en simpel, karakteristisk Forskydning af Koefficienterne til* 2^{den} *Grads Polynomierne.*

Anvende vi nu den samme Transformation

$$T = \int_{\gamma}^{\delta} e^{tx}\,\Phi(x)\,y\,dx,$$

hvor γ og δ ere Rødderne i Ligningen

$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$$

og $\Phi(x)$ dannet i Overensstemmelse hermed, paa (2), *komme vi tilbage til* (1).

De to Differentialligninger (1) og (2), som vi ville kalde *reciproke Differentialligninger*, ere paa det nøjeste forbundne med hinanden. *Den ene fører over i den anden og omvendt, og de integrere hinanden gensidigt.*

For ovenstaaende Differentialligning (1) finde vi følgende Udtryk for Φ-Funktionen

$$\Phi(t) = (t-\alpha)^A (t-\beta)^B e^{a_2 t}$$

hvor

$$A = \frac{(a_1 - 1)\alpha + (a_0 + \beta) + a_2\alpha^2}{\alpha - \beta}$$

og

$$B = \frac{(a_1 - 1)\beta + (a_0 + \alpha) + a_2\beta^2}{\beta - \alpha}.$$

Ifølge det foregaaende vil man altsaa have *som Integral* i (2)

$$y = c_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{(x+a_2)t} (t-\alpha)^A (t-\beta)^B\, T_1 dt + c_2 \int_{\alpha}^{\beta} e^{(x+a_2)t} (t-\alpha)^A (t-\beta)^B\, T_2 dt$$

hvor c_1 og c_2 ere arbitrære Konstanter og T_1 og T_2 danne et Fundamentalsystem af Integraler for (1), medens $R(A) > -1$ og $R(B) > -1$. Det skal her bemærkes, at *ovenstaaende Udtryk for y ingenlunde behøver at være det almindelige Integral, idet det kan hænde, at de 2 Integralers Forhold bliver konstant, hvorved man kun faar et particulært Integral.* Dette[1]) indtræder f. Ex. ved Differentialligningen

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (2\nu + 1)\,x\,\frac{dy}{dx} - (n(n+2\nu) + x^2)\,y = 0$$

hvor

---

[1]) O. A. Smith: Sur quelques relations intégrales entre les fonctions sphériques et cylindriques. — Giornale di matematiche. Vol. XLIII. 1905.

$$y = c_1 \int_{-1}^{+1} e^{tx} P^{\nu, n}(t)(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt + c_2 \int_{-1}^{+1} e^{tx} Q^{\nu, n}(t)(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

hvor $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ og

$$P^{\nu, n}(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{s \leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(n - s + \nu)}{s!\,(n - 2s)!} (2t)^{n-2s}$$

$$Q^{\nu, n}(t) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n + 2\nu)\, t^{-n-2\nu}}{2^{n+1}\,\Gamma(n + \nu + 1)} F\left(\frac{n+1}{2} + \nu,\ \frac{n}{2} + \nu,\ n + \nu + 1,\ \frac{1}{t^2}\right)$$

hvor i $Q^{\nu, n}(t)$ $|t| > 1$. Begge de 2 Integraler ere Cylinderfunktioner af 1ste Art.

Hvis man i Stedet for ovenstaaende almindelige Integraludtryk for y

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx}\, T\Phi(t)\, dt$$

betragtede Integralerne

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^{tx} T\Phi(t)\, dt, \quad R(x + a_2) > 0$$

og

$$\int_{\beta}^{\infty} e^{tx} T\Phi(t)\, dt, \quad R(x + a_2) < 0$$

vilde man finde den samme Differentialligning for y.

Vi have her kun betragtet det Tilfælde, hvor $\alpha \neq \beta$, *men den samme Reciprocitetssætning gælder ogsaa, naar* $\alpha = \beta$.

Den fundne Reciprocitetssætning kan bl. a. med Held anvendes til Integration ved bestemte Integraler af Ligninger af ovenstaaende Type.

Som Exempel betragte vi Differentialligningen

$$(x + a)\frac{d^2y}{dx^2} + (b_0 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (c_0 + c_1 x)y = 0.$$

Multiplicere vi denne med x, føres Differentialligningen over til en af den Type, vi her have betragtet.

Dens reciproke Differentialligning bliver da

$$(t^2 + b_1 t + c_1)\, T^{(2)} + (at^2 + b_0 t + c_0)\, T^{(1)} = 0 \tag{3}$$

medens Grænserne α og β i Integralet blive Rødder i Ligningen

$$t^2 + b_1 t + c_1 = 0.$$

Der bliver nu 2 Tilfælde at undersøge, efter $b_1^2 \mp 4c_1$ eller $b_1^2 = 4c_1$. I 1ste Tilfælde bliver

$$\Phi(t) = e^{at}(t-\alpha)^{\frac{b_0\alpha + c_0 + a\alpha^2}{\alpha-\beta} - 1}(t-\beta)^{\frac{b_0\beta + c_0 + a\beta^2}{\beta-\alpha} - 1}$$

og et particulært Integral bliver altsaa, idet $T_1 = 1$ tilfredsstiller (3),

$$y_1 = \int_\alpha^\beta e^{(x+a)t}(t-\alpha)^{\frac{a\alpha^2 + b_0\alpha + c_0}{\alpha-\beta} - 1}(t-\beta)^{\frac{a\beta^2 + b_0\beta + c_0}{\beta-\alpha} - 1} dt$$

hvor

$$R\left(\frac{a\alpha^2 + b_0\alpha + c_0}{\alpha - \beta}\right) > 0 \quad \text{og} \quad R\left(\frac{a\beta^2 + b_0\beta + c_0}{\beta - \alpha}\right) > 0$$

og som Integrationsvej vælges Forbindelseslinien mellem α og β.

Vi skulle nu fremdrage mere specielle Exempler paa Differentialligninger, der kunne udledes heraf som specielle Exempler og som alt ere behandlede af andre Forfattere.

1°. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2m\dfrac{dy}{dx} + xy = 0.$

Denne Differentialligning er bl. a. undersøgt af *Picard*[1]) og *Fouët*[2]).

Vi faa strax Grænserne bestemt ved

$$z^2 + 1 = 0$$

medens

$$\Phi(t) = (t^2 + 1)^{m-1}$$

og følgelig

$$y_1 = \int_{-i}^{+i} e^{tx}(t^2 + 1)^{m-1}\, dt$$

hvor $R(m) > 0$ og Integrationsvejen føres fra $-i$ langs de imaginære Tals Axe til $+i$.

---

[1]) Picard: Traité d'Analyse, t. III, Side 380—381. Paris 1896.

[2]) A. Fouët: Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques, t. II, Side 158—159. Paris 1904.

2°. $x\frac{d^2y}{dx^2}+(g-bx)\frac{dy}{dx}-ay=0.$

Differentialligningen er angivet af *Oskar Perron* [1]).

Grænserne bestemmes ved

$$z^2-bz=0$$

medens

$$\Phi\,(t)=t^{\frac{a-b}{b}}\,(t-b)^{\frac{(g-1)b-a}{b}}$$

Et partikulært Integral bliver altsaa

$$y_1=\int_0^b e^{tx}\,t^{\frac{a}{b}-1}\,(t-b)^{g-\frac{a}{b}-1}\,dt$$

hvor $R\left(\frac{a}{b}\right)>0$ og $R\left(g-\frac{a}{b}\right)>0.$

3°. $x\frac{d^2y}{dx^2}+(a-b^2x)y=0.$

Grænserne bestemmes ved

$$z^2-b^2=0$$

medens

$$\Phi\,(t)=(t^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1}$$

følgelig

$$y_1=\int_{-b}^{+b} e^{tx}\,(t^2-b^2)^{\frac{a}{2}-1}\,dt$$

hvor $R\,(a)>0.$ *Spitzer* [2]) har undersøgt Tilfældet $a=b=1.$

4°. $x\frac{d^2y}{dx^2}+a\cdot\frac{dy}{dx}+gxy=0.$

Grænserne bestemmes ved

$$z^2+g=0$$

medens

$$\Phi\,(t)=(t^2+g)^{\frac{a}{2}-1}$$

og følgelig

$$y_1=\int_{-\sqrt{-g}}^{+\sqrt{-g}} e^{tx}\,(t^2+g)^{\frac{a}{2}-1}\,dt$$

hvor $R\,(a)>0.$

[1]) Oskar Perron: Über eine specielle Klasse von Kettenbrüchen. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Tome XXIV, 1910, Side 119.

[2]) Spitzer: Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Wien 1878. § 88, S. 120.

For $a = 1$ er Ligningen undersøgt af *Fourier* i sin »Theorie analytique de la chaleur« Side 378, men han angiver Integralet paa Formen

$$y = \int_0^\pi \cos(x\sqrt{g}\cos\lambda)\, d\lambda$$

Ogsaa *Spitzer* har i sit ovenfor citerede Værk behandlet samme Tilfælde, men han angiver Integralet paa den af mig givne Form og viser derpaa, at de 2 Integraler kan transformeres over i hinanden.

Er $b_1^2 = 4c_1$, er

$$\Phi(t) = e^{at + \frac{\left(b_0 - \frac{b_1 a}{2}\right)\frac{b_1}{2} - c_0}{t + \frac{b_1}{2}}} \cdot \left(t + \frac{b_1}{2}\right)^{b_0 - b_1 a - 2}$$

medens Differentialligningen i T bliver

$$\left(t + \frac{b_1}{2}\right)^2 T^{(2)} + (c_0 + b_0 t + at^2)\, T^{(1)} = 0.$$

Paa samme Maade som i 1ste Tilfælde kan man nu forskaffe sig et partikulært Integral, en Undersøgelse, som vi her skulle udelade.

Derimod vil det vise sig, at følgende Integral

$$y_2 = \int_\alpha^\beta e^{tx}\, \Phi(t)\, T_2\, dt$$

hvor T_2 betegner det andet particulære Integral af (3), der sammen med $T_1 = 1$ danner et Fundamentalsystem, vil være en fremmed Løsning, der blot markerer den fremmede Løsning $x = 0$, som blev indført, da Differentialligningen blev multipliceret med x.

Hvorvidt der eksisterer en tilsvarende Reciprocitetssætning for Differentialligninger af højere Orden, er et Spørgsmaal, der indtil videre staar aabent. Meget synes at tyde paa dens Existens og jeg skal i et senere Arbejde komme tilbage dertil.

UNDERSØGELSER OVER LIGNINGERNES THEORI.

AF

J. L. W. V. JENSEN.

Mine Undersøgelser, af hvilke jeg her skal fremdrage nogle enkelte Punkter, strækker sig mere end 25 Aar tilbage. Jeg har hidtil intet publiceret deraf, dels fordi det Materiale, jeg samlede, var i en vis om end langsom Voksen, dels fordi min praktiske Virksomhed kun levner mig ringe Tid til videnskabelig Publikation. De omtalte Undersøgelser er nu i det væsentlige afsluttede, og det er min Hensigt, efterhaanden som min Tid og mit Helbred tillader det, at publicere dem paa Dansk i en Række af omtrent 5 Afhandlinger i Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, medens en fransk Oversættelse vil fremkomme i Acta Mathematica efter Aftale med Prof. *Mittag-Leffler*.

Indholdet af den 1ste Afhandling har jeg allerede forelagt i et Møde i Videnskabernes Selskab d. 5. Maj 1911, medens et Punkt af den 2den Afhandling er benyttet til et Foredag i Mathematisk Forening d. 16. Marts s. A. Det er herhenhørende Sætninger, som jeg her skal tillade mig at fremsætte og tildels bevise.

Den vigtigste Gren af Ligningernes Theori — naar man ser hen til Anvendelserne paa Naturvidenskaberne eller andre Dele af Mathematiken — er den, som beskæftiger sig med Adskillelsen og den tilnærmede Beregning af Rødderne i en forelagt Ligning, eller som man ogsaa kan sige, Rødderne eller Nulpunkterne af en algebraisk eller transcendent Funktion.

For de algebraiske Ligningers Vedkommende vilde man være tilbøjelig til at paastaa, at Emnet i det væsentlige var udtømt ved Arbejder af Mestre som *Rolle*, *Descartes*, *Newton*, *Lagrange*, *Fourier*, *Cauchy*, *Gauss*, *Sturm*, *Jacobi*, *Borchardt*, *Sylvester*, *Hermite* og *Brioschi*. Hertil maa føjes mindre bekendte men vigtige Arbejder af *de Gua* (Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1741, S. 92—95 & S. 95 og Mémoires . . . ., S. 72—96 & S. 435—494), hvori bl. A. Descartes' Regel bevises for første Gang og paa en simpel Maade, der senere er genfunden af Laguerre og fremsat af ham som ny, *Waring* (Miscellanea analytica, 1762 og Meditationes algebraicæ, 1770), *Campbell*, Kommentator til Newtons Arithmetica Universalis (Philosophical Transactions, Nr. 404, oversat til Latin og føjet til den 3die Udgave af Arithmetica, 1732), *Olivier*, der simpelt og smukt beviser en Sætning af Campbell for første Gang (Crelle's Journal, B. 1), og endelig last but not least *Laguerre's* mangeartede Undersøgelser fra Begyndelsen af 80'erne.

For de transcendente Funktioners Vedkommende er Forholdet et ganske andet. Her savner man Methoder til Behandling af Funktioner af mere almindelig Form. Dette er saa meget mere mærkeligt, som store Problemer venter paa deres Løsning af Mangel paa saadanne Methoder. Jeg behøver blot at minde om den endelige Løsning af Primtalproblemet, hvor det kommer an paa at vise, at en af *Riemann* i Taltheorien indført Funktion $\zeta(s)$ har alle sine imaginære Rødder af Formen $\frac{1}{2} + \alpha i$, hvor α er reel. Ved mine Undersøgelser er jeg netop gaaet ud paa Løsningen af det Riemann'ske Problem. I en Del Aar var disse Bestræbelser resultatløse, indtil jeg indsaa, at man maatte skaffe sig saa mange forskellige Methoder som muligt til Behandling af Klasser af transcendente Funktioner, dels ved Generalisation af bekendte Sætninger om Separation og Antal af Rødder i hele rationale Funktioner og Udvidelse heraf til transcendente Funktioner, dels ved Opstilling af nye Sætninger for de sidstnævnte. Vi skal her se Eksempler paa begge Dele.

Ved mine Undersøgelser er jeg ikke gaaet ud fra den mest almindelige Sætning, man kender, angaaende Adskillelsen af Rødderne i en hel rational Funktion med reelle Kofficienter, nemlig Sturm's Sætning, der — i alt Fald theoretisk — tillader en fuldstændig Diskussion. Vel har *Borchardt*, ved Hjælp af Sturm's Theorem eller rettere ved Hjælp af de Sylvester'ske Udtryk for de Sturm'ske Funktioner, vist hvorledes man kan opstille en Række af symmetriske Determinanter, som afhænger af Potenssummerne af Rødderne, og

hvis Fortegn bestemmer Antallet af de imaginære Rødder. Forsøger man at lade Graden af den givne rationale Funktion vokse i det uendelige, bliver disse Determinanter alle uendelige eller ubestemte og saaledes uden Betydning. Dette er imidlertid ingen virkelig Vanskelighed, thi man kan uden synderligt Besvær omdanne Determinanterne, saa at de i Stedet for Summer af de positive Potenser af Rødderne indeholder negative Potenser og bliver konvergente for hele Funktioner af en given endelig Rang. Vanskelighederne ligger paa andre Steder. Den komplicerede Form af de Udtryk, man betragter, er saa stor, at det allerede er haabløst ad denne Vej at ville forsøge paa i Praksis at bestemme Karakteren af Rødderne i en given rational Funktion. Saa meget mere gælder dette for de transcendente Funktioner. Det er derfor andre og mere specielle Methoder, som jeg til en Begyndelse har kastet mig over.

Naar en hel Funktion af x,

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

har alle sine Koefficienter reelle, og altsaa er, hvad jeg for Kortheds Skyld kalder for en »reel« Funktion, har Funktionen som bekendt de imaginære[1]) Rødder parvis konjugerede. Besidder en saadan Funktion netop τ Par imaginære Rødder, hvor τ kan være Nul, hel positiv eller uendelig, siger jeg for Kortheds Skyld, at Funktionens »Type« er τ. Saaledes er f. Eks. $(1 + x)^n$, e^x, e^{x^2} af Typen $\tau = 0$, medens $(1 + x^2)^n$ er af Typen $\tau = n$.

Der er en bekendt Sætning af Cauchy, som spiller en stor Rolle i mine Undersøgelser, og som i specialiseret Form kan udtales paa følgende Maade: Naar den reelle hele Funktion $F(x, t)$ afhænger af en reel Parameter t, der er bunden til en kontinuert eller diskret Værdirække, for $\lim t = t_0$ og for endelige Værdier af $|x|$ *ligeligt* konvergerer imod den hele Funktion $F(x, t_0)$, vil Rødderne i $F(x, t)$ konvergere imod Rødderne i $F(x, t_0)$. Under den Forudsætning, at Typen af $F(x, t)$ har en endelig højere Grænse, naar t nærmer sig t_0, ser man uden Vanskelighed, at Typen af $F(x, t_0)$ maa være $\leqq$ Typen af $F(x, t)$, thi de imaginære Rødder kan konvergere imod reelle Grænseværdier, men ikke omvendt.

Vi skal nu se nogle Anvendelser af Rolle's Theorem og Udvidelser deraf, som er af Vigtighed.

[1]) Jeg bruger stedse Betegnelsen »imaginære Rødder« om de, der er komplekse, men ikke reelle. Den upræcise Betegnelse »komplekse Rødder« ser man ofte anvendt.

Lad

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

være en hel rational Funktion af m^{te} Grad, reel og af Typen τ. Den har da $m - 2\tau$ reelle Rødder, og ifølge Rolle's Sætning, vil $f'(x)$ have et ulige Antal reelle Rødder imellem hver to paa hinanden følgende i $f(x)$, hvorved der paa bekendt Maade maa tages Hensyn til mulige flerdobbelte Rødder. $f'(x)$ har altsaa $m - 2\tau - 1 + 2k_1$ reelle Rødder, hvor k_1 er Nul eller et helt positivt Tal. Betegnes Typen af $f'(x)$ ved τ', haves saaledes $m - 2\tau - 1 + 2k_1 = m - 1 - 2\tau'$ eller $\tau - \tau' = k_1$. Anstiller man samme Betragtning for $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots f^{(m-2)}(x)$, er med let forstaaelige Betegnelser $\tau - \tau^{(m-1)} = \tau = k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1}$. Hvis man udtrykte sig saaledes: Rolle's Sætning viser, at $f'(x)$ normalt har een reel Rod, beliggende i hvert Rodinterval af $f(x)$, og desuden i det Hele $2k_1$ »andre« reelle Rødder, kunde man udtrykke det nys beviste saaledes: Typen af $f(x)$ er lig med det halve Antal af »andre« reelle Rødder i $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots f^{(m-1)}(x)$. Det er indlysende, at Typen af en hel rational Funktion ikke kan vokse ved Differentiation, hvilket iøvrigt er vel bekendt.

Lad atter $F(x)$ være en reel, hel, rational eller transcendent Funktion, af hvilken vi danner en hel, rational paa følgende Maade. Vi lader Symbolet $F(D)$, hvor D betegner Differentiationssymbolet med Hensyn til x, operere paa x^p, hvor p er et helt positivt Tal. Vi faar derved med den sædvanlige Betegnelse for Binomialkoefficienter

$$F(D)\cdot x^p = F(0)\, x^p + \binom{p}{1} F'(0) x^{p-1} + \binom{p}{2} F''(0)\, x^{p-2} + \cdots + F^{(p)}(0) = F_p(x),$$

som er højst af p^{te} Grad. Da

$$F'_p(x) = p F_{p-1}(x),$$

kan Typen af $F_p(x)$ aldrig aftage med voksende p. Lad os betragte Funktionen

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{p}\right)^p F_p\left(\frac{p}{x}\right) = F(0) + \frac{F'(0)}{\underline{|1}}\, x + \frac{F''(0)}{\underline{|2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^2 + \cdots \\ + \frac{F^{(p)}(0)}{\underline{|p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{p}\right) x^p, \end{aligned} \right.$$

som øjensynlig er af nøjagtig samme Type som $F_p(x)$. Man ser nu meget let, at Funktionen (1), for $|x|$ endelig, konvergerer *ligeligt* imod $F(x)$ for p voksende i det uendelige. Beviset er saa simpelt ved

Hjælp af de bekendte Cauchy-Weierstrass'ske Uligheder for Koefficienterne i en Potensrække, at jeg her kan forbigaa det.

Hvis vi kan vise, at Typen af $F_p(x)$ for alle p, har en endelig højere Grænse γ, vil derfor Typen af $F(x)$ være $\leqq \gamma$. Dette *Princip* finder mange Anvendelser i mine Undersøgelser; nogle vigtige Eksempler herpaa skal vi se i det følgende.

I *Waring's* Meditationes algebraicæ findes Beviset for en Sætning, som kan udtrykkes paa følgende Maade.

Naar $f(x)$ er en hel, rational Funktion, reel og af Typen τ, samt a er en reel Konstant, vil

$$af(x) + f'(x) = (a + D)\cdot f(x) \tag{2}$$

højst være af Typen τ. Man beviser dette ganske simpelt ved at anvende Rolle's Theorem paa $e^{ax}f(x)$, idet

$$D(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(af(x) + f'(x)).$$

Gentager vi Operationen $(a + D)$ n Gange med forskellige eller lige store a, har vi hermed bevist en Sætning af *Poulain*, som kan udtrykkes saaledes:

Naar $g(x)$ er en hel rational Funktion, reel og af Typen o, og $f(x)$ er af Typen τ, vil

$$g(D)\cdot f(x) = g(0)f(x) + \frac{g'(0)}{\lfloor 1}f'(x) + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{\lfloor n}f^{(n)}(x) \tag{3}$$

højst være af Typen τ. Dette er iøvrigt vel bekendt. Men lad os nu i (2) erstatte $f(x)$ med $e^{bx}f(x)$, hvor b er en reel Konstant. Vi finder, at

$$(a + D)\cdot e^{bx}f(x) = e^{bx}\,((a + b)f(x) + f'(x))$$

højst er af Typen τ, og følgelig er Poulain's Theorem udvidet til at gælde, naar $f(x)$ erstattes med $e^{bx}f(x)$.

Lad nu $F(x)$ være en reel hel, transcendent Funktion af o^te^ eller 1^ste^ Rang og af den endelige Type τ. Lad

$$F_n(x) = ce^{c_n x}x^{\mu}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{\alpha_\nu}\right)e^{\frac{x}{\alpha_\nu}},\ ^{1)}$$

[1]) Som ikke maa forveksles med Betegnelsen S. 54.

hvor $e^{c_n x}$ er den ydre eksponentielle Faktor[1]), α_ν betegner Rødderne i $F(x)$, og n er saa stor, at alle de imaginære Rødder er medtagne i det kanoniske Produkt. Da gælder, som vi lige har vist, Poulain's Theorem for Funktionen F_n, og da ifølge Weierstrass Produktet konvergerer ligeligt imod $F(x)$ for $n = \infty$, for ethvert endeligt $|x|$, er hermed *Poulain's Theorem udvidet til at gælde, naar* $f(x)$ *erstattes med en Funktion af* 0[te] *eller* 1[ste] *Rang og af Typen* τ.

En endnu almindeligere Sætning er følgende:

Naar $g(x)$ *er hel rational af* n^{te} *Grad og af Typen* 0, *medens* $F(x)$ *er hel transcendent af* $2q^{\text{te}}$ *eller* $2q + 1^{\text{ste}}$ *Rang og af Typen* τ, *vil* $g(D) \cdot F(x)$ *højst være af Typen* $\tau + qn$.

Andre Generalisationer af Poulain's Theorem, som gaar ud paa Udvidelse af $g(x)$, maa jeg her forbigaa. Der er dog et specielt Tilfælde som fordrer særlig Omtale.

Lad os i (3) tage $f(x) = x^p$. Da følger, at $g(D) \cdot x^p$ er af Typen 0. Vi kan heri erstatte $g(x)$ med $e^{cx} g(x)$, hvor c er reel; thi Anvendelse af Operatoren e^{cD} paa den hele, rationale Funktion $g(D) \cdot x^p$ fører[2]) ifølge Taylor's Formel til $g(D) \cdot (x + c)^p$. Og ved at ræsonnere som ovenfor, har vi følgende Sætning:

Naar $G(x)$ er en reel hel Funktion af 0[te] eller 1[ste] Rang og af Typen 0, vil $G(D) \cdot x^p$ være af Typen 0.

Denne Sætning var *Laguerre* bekendt i et specielt Tilfælde. Jeg skal imidlertid nu vise, at Sætningen gælder for Funktioner af vilkaarlig endelig Type.

Lad

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

være reel og af Typen τ, og lad q være et helt positivt Tal $\geqq m$, da er

$$x^q f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \cdots + a_m x^{q-m},$$

ligeledes nøjagtig af Typen τ. Differentierer jeg den sidste Funktion $q - p$ Gange med Hensyn til x, idet p er hel positiv og $< q$, er ifølge Rolle's Theorem

---

[1]) Naar F er af 1[ste] Rang, er c_n konstant, men naar F er af 0[te] Rang, er $c_n = -\sum_{1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}$.

[2]) Jeg forudsætter, at man kender de simpleste Regler for eksakt Regning med distributive Operationer.

$$D^{q-p}\left(x^q f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{|\underline{q}}{|\underline{p}}\left(a_0 x^p + a_1 \frac{p}{q} x^{p-1} + a_2 \frac{p(p-1)}{q(q-1)} x^{p-2} + \cdots\right) = \frac{|\underline{q}}{|\underline{p}} \varphi_q(x)$$

højst af Typen τ. Nu er øjensynlig

$$\lim_{q=\infty} q^p \varphi_q\left(\frac{x}{q}\right) = a_0 x^p + p a_1 x^{p-1} + p(p-1) a_2 x^{p-2} + \cdots = f(D)\cdot x^p$$

højst af Typen τ.

Ved at ræsonnere som ovenfor, udvides dette til at gælde for en hel transcendent Funktion $F(x)$ af 0[te] eller 1[ste] Rang og af Typen τ, og kombinerer jeg dette med det tidligere beviste Princip, har jeg hermed fundet følgende fundamentale Sætning:

Naar $F(x)$ er en reel hel transcendent Funktion af 0[te] *eller* 1[ste] *Rang af den endelige Type τ, vil den hele rationale Funktion $F(D)\cdot x^p$ højst være af Typen τ, og er omvendt den sidste for ethvert p højst af Typen τ, vil $F(x)$ højst være af Typen τ. For et vist p og alle større er Typen af $F(D)\cdot x^p$ netop lig med Typen af $F(x)$.*

Denne Sætning, som i Parentes bemærket, *ikke* gælder for hele Funktioner af 2[den] og højere Rang, spiller en stor Rolle i mine Undersøgelser.

Et Eksempel fra mine senere Undersøgelser vil vise, hvilken Nytte man kan drage deraf. *E. Malo*[1]) har ved en forenet Anvendelse af Descartes' og Sturm's Sætninger bevist den meget smukke Sætning, at naar de hele reelle Funktioner

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

og

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

begge har lutter reelle Rødder, og den sidstes Koefficienter alle er *positive*, saa vil

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x^1 + a_2 b_2 x^2 + \cdots$$

ligeledes have alle sine Rødder reelle.

Lad $F(x)$ og $G(x)$ være reelle hele transcendente Funktioner af 0[te] eller 1[ste] Rang og af Typen 0, og lad $G(x)$ have lutter positive Koefficienter, da er $F(D)\cdot x^p$ og $G(D)\cdot x^p$ hele rationale Funktioner, hvorpaa jeg kan anvende Malo's Theorem. Jeg faar altsaa, at

$$\sum_{\nu=0}^{p} F^{(\nu)}(0)\, G^{(\nu)}(0) \binom{p}{\nu}^2 x^{p-\nu}$$

[1]) Journal de Mathématiques spéciales, 4e série t. IV, 1895.

er af Typen o. Sætter vi heri $\frac{p^2}{x}$ for x og multiplicerer med $\left(\frac{x}{p^2}\right)^p$, faar vi

$$\sum_{\nu=0}^{p} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \left(1-\frac{2}{p}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{\nu-1}{p}\right)^2 x^\nu.$$

Lader vi p vokse i det uendelige, konvergerer dette *ligeligt* imod

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\underline{|\nu}} x^\nu.$$

Hermed er Malo's Sætning udvidet til hele transcendente Funktioner af Rangen o *eller* 1. En direkte Anvendelse af Malo's Methode vilde i dette Tilfælde have været umulig.

En af de vigtigste Anvendelser, man kan gøre af Sætningen, henhører til den sidste Del af mine Undersøgelser, og skønt jeg ikke her uden indgaaende Referat af de mellemliggende Undersøgelser kan meddele Slutresultaterne i forstaaelig Form, kan jeg gøre en Antydning. Den sidste i Rækken af mine 5 forhen omtalte Afhandlinger vil komme til at beskæftige sig med en Klasse af hele, transcendente Funktioner af 1ste Rang

$$F(x) = \int_0^\infty \Psi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \tag{4}$$

hvor den reelle Funktion $\Psi(\alpha)$ kan differentieres et ubegrænset Antal Gange og aftager saaledes med voksende α, at man har

$$\lim_{\alpha=\infty} \Psi^{(\nu)}(\alpha) \cos \alpha x = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

naar x ligger i en endelig Afstand fra Nulpunktet i den komplekse Talplan. Denne Klasse af Funktioner har en særlig Vigtighed, fordi den Riemann'ske ξ-Funktion

$$\xi(t) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s), \quad s = \tfrac{1}{2} + it,$$

indgaar som specielt Tilfælde heri. Man har nemlig

$$\xi(x) = \int_0^\infty \Phi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

hvor

$$\Phi(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(8\pi^2 e^{\frac{9}{2}\alpha} \nu^4 - 12\pi e^{\frac{5}{2}\alpha} \nu^2 \right) e^{-\nu^2 \pi e^{2\alpha}}.$$

Jeg stiller mig nu den Opgave at undersøge i Almindelighed, hvilke Betingelser $\Psi(\alpha)$ maa opfylde for, at (4) skal være af Typen 0. Anvendes vor fundamentale Sætning paa (4), ser vi straks, *at $F(x)$ da og kun da er af Typen* 0, *naar den hele rationale Funktion af* p^{te} *Grad,*

$$F(D) \cdot x^p = \int_0^{\infty} \Psi(\alpha) \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \binom{p}{2\nu} (-1)^\nu x^{p-2\nu} \alpha^{2\nu} d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Psi(\alpha) \left((x + \alpha i)^p + (x - \alpha i)^p \right) d\alpha$$

ligeledes er af Typen 0 *for ethvert p.* Det lykkes mig at opstille nødvendige Betingelser herfor; disse leder ved Anvendelse af Resultater af andre af mine Undersøgelser til tilstrækkelige, men ikke nødvendige Betingelser, og disse omfatter heldigvis ξ-Funktionen. Selve Verifikationen af Betingelserne fordrer imidlertid paa Grund af den komplicerede Form for $\Phi(\alpha)$ et meget betydeligt Regnearbejde. Ved ovenstaaende har jeg reduceret det Riemann'ske Problem fra at være et transcendent til at være et algebraisk.

Inden jeg gaar videre til Beviset for en Sætning, som vil blive publiceret i min Afhandling Nr. 2, maa jeg meddele nogle yderligere Resultater af min første Afhandling. Jeg indskrænker mig ikke til at bestemme Typen af de Klasser af Funktioner, jeg behandler, men jeg finder ogsaa Grænser for de imaginære Rødder. *Gauss* har bevist følgende Sætning: Naar $f(x)$ er en hel rational Funktion med komplekse Koefficienter, og vi i den komplekse x-Plan afsætter alle Rødder i $f(x)$, vil Rødderne i $f'(x)$ ikke falde udenfor den mindste konvekse Polygon, som omslutter de førstnævnte Rødder [1]). Beviset føres meget let ved Hjælp af den logarithmiske Deriverede og ved at bemærke, at ingen Rod i $f'(x)$ kan ligge paa den ene Side af en ret Linie, naar Rødderne i $f(x)$ alle ligger paa den anden Side af Linien eller paa denne.

[1]) Denne Sætning synes lidet bekendt. Den er opdaget paa ny et ikke ringe Antal Gange af forskellige Mathematikere.

For en hel, *reel* Funktion $F(x)$ af 0^{te} eller 1^{ste} Rang kan man finde en mere præcis Sætning. Vi danner en Figur, som bestaar af den reelle Akse og af de Cirkler, hvis Diametre ender i hvert sit Par af de konjugerede imaginære Rødder. Jeg beviser da, at intet Rodpunkt af $F'(x)$ kan falde udenfor Figuren, og det samme gælder $aF(x)+F'(x)$, hvor a er reel. *Samme Sætning gælder for $g(D)\cdot F(x)$, hvor $g(x)$ er reel hel, rational, af n^{te} Grad og af Typen 0; kun skal Cirklerne erstattes med Ellipser, hvis smaa Akser ender i hvert sit Par af de konjugerede Rødder af $F(x)$, medens de store Akser er $\sqrt{n}$ Gange saa store.*

Er Rødderne i $F(x)$ alle begrænsede til Strimlen $-\eta < \Re\left(\frac{x}{i}\right) < \eta$, vil Rødderne i $g(D)\cdot F(x)$ have samme Begrænsning, o. s. v.

Jeg maa endnu nævne en Sætning, som omfatter en stor Del af de hidtil i Litteraturen behandlede transcendente Ligninger som specielle Tilfælde.

Er

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdot$$

reel af 0^{te} eller 1^{ste} Rang og af Typen τ, $H(x)$ reel af 0^{te} eller 1^{ste} Rang, af Typen 0 og med h positive Rødder, samt $K(x)$ reel af 0^{te} Rang, af Typen 0 og med alle Rødder negative, vil

$$a_0 H(0) + a_1 \frac{H(1)}{K(0)} x + a_2 \frac{H(2)}{K(0)\,K(1)} x^2 + a_3 \frac{H(3)}{K(0)\,K(1)\,K(2)} x^3 + \cdots\cdot$$

højst være af Typen $\tau + h$.

Laguerre paastaar at have bevist en Sætning[1]), der fremgaar som et meget specielt Tilfælde heraf, nemlig det hvor $F(x)$ er rational (og altsaa af endelig Grad), $\tau = 0$, $h = 0$, medens dog $K(x)$ kan være af 1^{ste} Rang. Den sidste Betingelse er imidlertid *urigtig*. Da *Laguerre* ikke har gennemført sit Bevis, kan man ikke se, hvor Fejlen ligger.

Den Sætning, jeg nu skal bevise, er af en ganske anden Karakter end de hidtil omtalte.

Lad $F(z)$ være en hel Funktion af den komplekse variable $z = x + iy$. Den antages at være reel og af 0^{te} eller 1^{ste} Rang og af Typen 0. Man har altsaa det endelige eller ogsaa absolut konvergente Produkt

[1]) Acta Mathematica, B. IV, 1884 og Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3. Række, B. IX, 1883; Oeuvres, I, S. 202 og 35.

$$F(z) = e^{c_0 + c_1 z} z^{\mu} \prod_{(\alpha)} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha}},$$

hvor Konstanterne c_0 og c_1 samt Rødderne α alle er reelle. Danner jeg nu Kvadratet paa den absolute Værdi af $F(z)$, har jeg øjensynligt

$$|Fz|^2 = e^{2c_0 + 2c_1 x} (x^2 + y^2)^{\mu} \prod \frac{(x-\alpha)^2 + y^2}{\alpha^2} e^{2\frac{x}{\alpha}}$$

$$= (Fx)^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\mu} \prod \left(1 + \frac{y^2}{(x-\alpha)^2}\right).$$

Udvikles dette efter Potenser af y^2, faar vi saaledes

$$|Fz|^2 = A_0 + A_2 y^2 + A_4 y^4 + \cdots,$$

hvor Koefficienterne er *positive* Funktioner af x for enhver reel Værdi af x, som er forskellig fra en Rod α. Ved Taylor's Række og ifølge Leibniz' Formel for Differentiation af et Produkt, ser man, at

$$\underline{|2\nu}\, A_{2\nu} = (-1)^{\nu} D^{2\nu}_{\rho=0} (F(x+\rho) F(x-\rho))$$

$$= \binom{2\nu}{\nu} (F^{(\nu)} x)^2 - 2 \binom{2\nu}{\nu - 1} F^{(\nu-1)}(x) F^{(\nu+1)}(x) + \cdots + (-1)^{\nu} \cdot 2 F(x) F^{(2\nu)}(x).$$

Det er altsaa en *nødvendig* Betingelse for, at $F(z)$ skal være af Typen o, at alle disse Funktioner for $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ skal være positive eller Nul[1]), naar x er reel. Omvendt er det indlysende, at disse Betingelser tillige maa være *tilstrækkelige*, thi hvis de alle er opfyldt, er $|Fz|^2$ for x konstant ingensinde aftagende med voksende y^2, og for $y = 0$, er $|Fz|^2 = (Fx)^2$. Naar $Fx \neq 0$, maa $|Fz|^2 > 0$; og for $F(x) = 0$, kan heller ikke $|Fz|^2 = 0$ for noget $y \neq 0$. Var det Tilfældet maatte $|Fz|^2$ konstant være Nul, men dette er umuligt, naar $F(z)$ ikke netop reducerer sig til Nul.

Disse nødvendige og tilstrækkelige Betingelser, som er fundet paa en saa overordentlig simpel Maade, er imidlertid ofte vanskelige at anvende i Praksis paa en forelagt Funktion.

---

[1]) Tilfældet $\nu = 1$ giver os den nødvendige Betingelse $(F' x)^2 - F(x) F''(x) > 0$, som er fundet af Laguerre. Naar man vil være absolut korrekt, maa man dog til Ulighedstegnet føje et Lighedstegn. Naar Lighedstegnet ikke kan indtræde, og $F(x)$ har alle Rødder reelle, er der ingen *lige* Rødder. Jeg kan ikke her gaa i yderligere Detailler.

Hvis vi differentierer $|Fz|^2$ med Hensyn til y, finder vi

$$\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 = 2A_2 y + 4A_4 y^3 + \cdots.$$

Heraf udledes følgende.

Naar $F(z)$ er af 0^{te} eller 1^{ste} Rang, reel og af Typen 0, maa

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 = 2\Re\left(\frac{1}{i}F(z)F'(\bar{z})\right) = \frac{1}{2}(|Fz+iF'z|^2 - |Fz-iF'z|^2) > 0,$$

for $y > 0$; (for $y < 0$ skal Ulighedstegnet blot vendes om paa Grund af Symmetrien med Hensyn til den reelle Akse). Denne nødvendige Betingelse er imidlertid ogsaa tilstrækkelig, selv om $>$ erstattes med $\geqq$. Af Uligheden følger nemlig, at $|Fz|^2$, hvori x *betragtes som konstant*, maa vokse med y positiv eller være konstant, og da denne Funktion er lig med $(Fx)^2 \geqq 0$ for $y = 0$, kan $|Fz|^2$ kun blive Nul for et $y > 0$, naar $|Fz|^2$ er konstant og lig 0.

Altsaa er følgende Sætning bevist:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F(z)$ *er af Typen* 0, *er at Uligheden* (5) *er opfyldt i den Halvplan, som ligger over den reelle Akse; ja det er endog en tilstrækkelig Betingelse, naar* $>$ *erstattes med* $\geqq$ [1]).

Med andre Ord: *naar man i den øverste Halvplan kan finde en Værdi af* z, *for hvilken* $\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2$ *er negativ, maa* $F(z)$ *have imaginære Rødder; kan man ikke det, er alle Rødder reelle.*

Af Rækkeudviklingen for $\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2$ har vi hidtil kun benyttet den Egenskab, at den for positive y ikke har en negativ Sum. Vil man gøre den nødvendige Betingelse saa snæver som muligt, kan man opnaa dette ved at betragte eet eller flere Led af Rækkeudviklingen. Man finder saaledes som nødvendig Betingelse:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 \geqq 4\left((F'x)^2 - F(x)F''(x)\right) \geqq 0$$

i hele Planen, o. s. v., o. s. v.

[1]) Det er naturligvis kun tilsyneladende, at den tilstrækkelige Betingelse i sin Form er mere omfattende end den nødvendige. For Anvendelserne er dette en Fordel. I det følgende gør jeg Forskellen mellem den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse endnu større.

TRYKFEJL

Side 62; Formlen nederst skal hedde:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left|F_z\right|^2 \geqq 2\left((F'(x))^2 - F(x)\,F''(x)\right) \geqq 0$$

Side 63; sidste Linie i Formel (6) skal hedde:

$$= 2A_2 \geqq 2\left((F'(x))^2 - F(x)\,F''(x)\right) \geqq 0$$

Ved at stille mine Betragtninger lidt mere almindeligt kan jeg forøvrigt bevise følgende mere omfattende Sætning:

Hvis

$$\frac{\partial}{\partial y}|Fz|^2 \quad \text{eller} \quad |Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2$$

er positiv overalt i den øverste Halvplan, med Undtagelse af en vis endelig Del deraf, saa har den reelle Funktion $F(z)$, *af* 0^{te} *eller* 1^{ste} *Rang, sin Type endelig.*

Man kan give disse Sætninger mange andre Former, som jeg ikke her kan komme ind paa, og hvorom jeg maa henvise til mine udførlige Undersøgelser. Kun følgende skal omtales.

Betragter jeg Rækkeudviklingen

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|Fz|^2 = 2A_2 + 4\cdot 3A_4 y^2 + \cdots,$$

ser jeg straks, *at*

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}|Fz|^2 = 2|F'z|^2 - 2\Re\,(F(z)\,F''(\bar{z})) \\ \qquad\qquad = 2|F'z|^2 - \frac{1}{2}|Fz + F''z|^2 + \frac{1}{2}|Fz - F''z|^2 \\ \qquad\qquad \geqq 2A_2 = 4\,((F'x)^2 - F(x)\,F''(x)) \geqq 0 \end{cases}$$

er en nødvendig Betingelse for, at alle Rødder skal være reelle. Er overalt

$$(7)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}|Fz|^2 \geqq 0$$

maa omvendt $F(z)$ *være af Typen* 0.

$|Fz|^2$ er nemlig da en konveks Funktion af y, som paa Grund af Symmetrien med Hensyn til den reelle Akse kun kan have et Minimum for $y = 0$.

Ligesom ovenfor har man ogsaa her den udvidede Sætning:

Naar Uligheden (7) *er opfyldt udenfor en vis endelig Del af* z-*Planen, er* $F(z)$ *af endelig Type.*

Det er ganske interessant at anvende disse Sætninger paa de hidtil i Litteraturen behandlede transcendente Ligninger. Eksempler kan tages hos *Fourier, Poisson, Cauchy, Hurwitz* m. fl. og vil give et Begreb om, hvor let disse nye Kriterier kan anvendes paa simplere Tilfælde. For lige at nævne et Eksempel (efter *Cauchy*) betragter vi den bekendte Ligning $\sin z - z\cos z = 0$. Sættes venstre Side heraf lig $F(z)$, har man

$$|F'z|^2 - \Re\left(F(z)\,F''(\bar z)\right) = |z\sin z|^2 - \Re(\sin z - z\cos z)\,(\sin\bar z + \bar z\cos\bar z)$$
$$= |z\sin z|^2 - |\sin z|^2 + |z\cos z|^2$$
$$= (x^2\mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x) + (y^2\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y) + (x^2+y^2)\,\mathrm{sh}^2 y,$$

hvor alle Parenteser er $\geqq 0$. Altsaa er alle Rødder reelle.

For Funktioner af højere Rang end den 1ste gælder tilsvarende, men noget mere komplicerede Kriterier.

Lad $F(z)$ være reel og af $2p^{te}$ eller $2p+1^{ste}$ Rang, da er, idet vi for Simpelheds Skyld antager, at der ingen Rødder Nul findes,

$$F(z) = e^{g(z)} \prod_{(\alpha)} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{2p+1}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}},$$

hvor

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \cdots\cdots + c_{2p+1}\, z^{2p+1}$$

har alle Koefficienterne reelle, og det endelige eller absolut konvergente Produkt udstrækkes til alle Rødder α.

Hvis $F(z)$ er af Rangen $2p$, skal $c_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1}\sum \frac{1}{\alpha^{2p+1}}$. c'erne bestemmes som bekendt let ved Differentiation af $\log F(z)$.

Den nødvendige Betingelse for, at alle Rødder er reelle, er at man i Halvplanen $y > 0$ stedse har

$$|z^{2p}Fz + iF'z|^2 - |z^{2p}Fz - iF'z|^2 > |Fz|^2\left(|z^{2p} + ig'z|^2 - |z^{2p} - ig'z|^2\right),$$

og den tilstrækkelige Betingelse er af samme Form, idet man dog kan erstatte $>$ med $\geqq$.

Beviset for denne Sætning, som for $p = 0$ reducerer sig til en ovenfor angivet, kan jeg ikke her komme ind paa.

Til Slutning maa jeg have Lov til at gøre Brug af en maaske lidt hasarderet, men anskuelig Betragtning. Lad $F(z)$ være en analytisk Funktion af $z = x + iy$, regulær indenfor et vist Omraade af z-Planen. Jeg tænker mig denne vandret og oprejser i hvert af dens Punkter en lodret Koordinat $\zeta = |Fz|^2$. Herved fremkommer der en Flade med de retvinklede Koordinater x, y, ζ, om hvilken jeg har bevist følgende[1]).

[1]) Nyt Tidsskrift f. Matematik, Bd. XXI, 1910. Om den absolute Værdi af en analytisk Funktion (Resumé af et Foredrag i Matematisk Forening d. 19. Marts 1908).

Betegnes ved φ Toplansvinklen imellem (x, y) Planen og Tangentplanen i Punktet (x, y, ζ), er

$$\mathrm{tg}^2 \varphi = 4 \,|\, F(z) \, F'(z) \,|^2.$$

Tangentplanen er kun vandret i de af Fladens Punkter, hvis Projektioner falder i Nulpunkterne af $F(z)$ eller af $F'(z)$. I de første falder Tangentplanen sammen med z-Planen, i de af de sidste, som ikke tillige er Nulpunkter i $F(z)$, er Tangentplanen en Vendetangentplan.

Man kunde kalde en saadan Flade et »analytisk Landskab«. Tænkte man sig, at det regnede i dette Landskab, vilde Regnen samle sig i de laveste Punkter og danne smaa Søer omkring Nulpunkterne af $F(z)$. For en reel Funktion af 0^{te} eller 1^{ste} Rang og af Typen 0 vilde det »analytiske Landskab« have en Dalsænkning med smaa Søer langs den reelle Akse.

NYE UNDERSØGELSER OVER GEOMETRIENS GRUNDLAG.

AF

J. HJELMSLEV.

VED Kongressen i Stockholm for 2 Aar siden havde jeg Lejlighed til at fremsætte nogle af de vigtigste Resultater af de nyere Undersøgelser over Geometriens Principper. Jeg skal nu i Dag have den Ære at supplere denne Meddelelse med nogle Resultater, som jeg er naaet til i Mellemtiden.

Som bekendt kan man gennemføre den systematiske Begrundelse af Projektivgeometrien uden Anvendelse af Parallelaksiomet og uden Anvendelse af Kontinuitetsprincippet. Med Hensyn til Parallelaksiomet stiller Sagen sig saaledes, at man ubetinget kan undvære det: der træder intet nyt Postulat i Stedet. Med Hensyn til Kontinuitetsprincippet er Forholdet imidlertid anderledes: Man maa i Stedet for Kontinuitetspostulatet indføre Kongruensforudsætninger. At dette alligevel betyder en væsentlig Reduktion, fremgaar deraf, at det nye Postulatsystem omfatter Anvendelser, Geometrier, der ikke tilfredsstiller Kontinuitetspostulatet, de saakaldte Ikke-Arkimediske Geometrier, saaledes at det nye System faar en væsentlig større Rækkevidde. Ved denne Fremstilling af Projektivgeometrien har man altsaa 2 Grupper af Postulater: de rent projektive Forudsætninger for det 3-dimensionale Rum, og Kongruensforudsætninger.

Med Hensyn til de sidste har *F. Schur* i 1902 indskrænket dem til Anvendelse i én enkelt Plan, hvorimod de projektive Postulater stadig omfattede hele Rummet. Det System, man derved var naaet til, kan betegnes som det *Pasch-Schur'ske* System, idet nemlig *Pasch* har Æren af at have givet Midlerne til at undgaa Parallelaksiomet,

medens *Schur* har vist, at man kan undgaa Kontinuitetspostulatet ved Indførelse af Kongruensforudsætninger.

I 1907 lykkedes det mig at vise, at man kan undvære enhver Forudsætning om, at Rummet er tredimensionalt, saa at man herefter ved Siden af den *Pasch-Schur'ske* Begrundelse af Projektivgeometrien ogsaa har en Begrundelse i Planen alene.

Nu mener *Schur* imidlertid at have lagt Mærke til en væsentlig Forskel i de 2 Systemer med Hensyn til Kongruensforudsætningerne, og han fremhæver denne Forskel temmelig stærkt i sin nye Bog: Grundlagen der Geometrie, hvor begge Systemer er udførligt behandlede. *Schur* har nemlig der formuleret sine Kongruensforudsætninger saaledes, at ét af dem, Postulatet om Liniestykkets Omvending ($AB = BA$) ikke spiller nogen Rolle ved Beviset for Projektivgeometriens Fundamentalsætning, medens dette Postulat paa den anden Side synes at være en nødvendig Forudsætning i det plane System.

Sammenhængen hermed er nu i Virkeligheden følgende: Det er rigtigt, at det omtalte Postulat om Liniestykkets Omvending finder direkte Anvendelse i den plane Fremstilling, men ikke i den rumlige. Men Brugen af Postulatet er speciel, idet det kun benyttes i saadanne specielle Tilfælde, hvor Liniestykkets Endepunkter paa Forhaand vides at være afledede af hinanden ved en Række Spejlinger. Med andre Ord: Postulatet behøver kun at tages i en stærkt begrænset Form: *Naar de to Sider i en Trekant hver for sig kan vendes om, gælder det samme om den tredje Side.*

Men i denne specielle Form viser Postulatet sig ikke længere uafhængigt af det *Pasch-Schur'ske* System, idet det kan bevises ved Hjælp af de øvrige Forudsætninger.

Jeg skal nu imidlertid meddele en meget væsentlig yderligere Reduktion af det plane System (og dermed af det almindelige Grundlag). Systemet, som det hidtil forelaa, omfattede dels projektive Postulater (den rette Linies Bestemmelse ved 2 Punkter, Ordning af Punkter paa en ret Linie, Planens Deling i adskilte Dele ved rette Linier) og dels Kongruensforudsætninger. De Reduktioner, som jeg har opnaaet, er nu følgende:

1) Postulaterne om Ordningen af Punkter paa en ret Linie og om Planens Deling ved rette Linier kan udelades.

2) Fordringen om, at et vilkaarligt Punkt (Linie) ved Flytning kan føres over i ethvert andet Punkt (Linie) kan ogsaa stryges.

3) Omvendingspostulaterne (for Liniestykke og Vinkel) kan reduceres betydeligt.

Det System, man beholder tilbage, ser saaledes ud:

1) 2 forskellige Punkter bestemmer én og kun én ret Linie.

2) Der gives foruden Identiteten én og kun én Flytning som lader en ret Linies Punkter, hvert for sig, blive liggende. Denne Flytning kaldes en Spejling med Hensyn til Linien. 2 forskellige Linier, som har et Punkt fælles, kan ikke svare til samme Spejling.

3) Foruden Identiteten gives der én og kun én Flytning af en ret Linie i Linien selv, der lader et vilkaarligt af Liniens Punkter ligge fast.

4) Naar der eksisterer en Flytning af en ret Linie AB i Linien selv, saaledes at A føres over i B, da eksisterer der en Flytning, som ombytter Punkterne A og B.

5) Naar 2 kongruente Punktrækker beliggende paa forskellige Linier har et Punkt fælles, som svarer til sig selv, da eksisterer der en Spejling, som fører Rækkerne over i hinanden.

Paa Grundlag af disse Postulater alene lykkes det nu at bevise Fundamentalsætningen i den projektive Geometri.

Beviserne eller Hjælpemidlerne kan jeg ikke her komme ind paa. Jeg skal kun endnu give et Par orienterende Oplysninger med Hensyn til det Fremskridt, som de nævnte Reduktioner betegner. Det kan kort karakteriseres ved 2 væsentlige Resultater:

For det første *har man frigjort sig ikke blot fra det almindelige Kontinuitetsprincip, men tillige fra enhver Fordring om irrationale Operationers Mulighed.* I den gamle Kongruenslære laa implicit Fordringen om visse Kvadratrødders Eksistens. I den nye, saaledes som jeg forelægger den i Dag, er vi ude over denne Fordring. Hvad jeg mener hermed vil træde tydeligere frem, naar jeg nævner et simpelt Eksempel: Den Geometri, som vi faar ved i den Cartesiske Plan at tage alle Punkter med rationale Koordinater, medens alle andre Punkter udelades, tilfredsstiller det nye System af Postulater, men ikke det ældre, idet enhver Linie ikke kan flyttes over i enhver anden Linie.

Det andet Fremskridt vi har naaet, er det, at Postulaterne om Ordningen af den rette Linies Punkter og om Planens Deling (de grafiske Postulater) ogsaa viser sig at være overflødige. Tilbage staar af de rent projektive Fordringer kun den om den rette Linies Bestemmelse ved 2 Punkter. Kan vi ogsaa frigøre os fra den?

Nej! Det ligger i selve Projektivgeometriens Natur, at den nævnte Grundsætning maa blive staaende. Og om nogen logisk Afhængighed mellem den nævnte Forudsætning og de øvrige 4 Postulater kan der ikke være Tale; til Bevis herfor behøver man kun at betragte den radial-projektive Geometri, som er behandlet udførligt i *Study's*: Geometrie der Dynamen. I denne Geometri viser det sig nemlig, at den nævnte Forudsætning om Liniens Bestemmelse ved 2 Punkter ikke gælder, medens de øvrige 4 Postulater alle er tilfredsstillede.

Derimod kan man formulere et nyt Problem: *det metriske Problem*, som bestaar i at undersøge alle de Geometrier, hvori de metriske Postulater gælder, men hvor Postulatet om den rette Linies éntydige Bestemmelse ikke nødvendigvis gælder. Med Formuleringen af dette Problem træder Undersøgelserne over Geometriens Grundlag ind i et helt nyt Spor, idet vi her staar over for et Undersøgelsesomraade med vidtgaaende Anvendelser.

ET PROBLEM I ANALYSIS SITUS.

AF

POUL HEEGAARD.

EN foreløbig Meddelelse, der senere vil fremkomme i udvidet Form. De nævnte Undersøgelser vedrører Knudeproblemet og dettes Sammenhæng med gruppeteoretiske Spørgsmaal.

OM ÄNDLIGT MÅNGTYDIGA INTEGRALER TILL ALGEBRAISKA DIFFERENTIAL-EKVATIONER AF FÖRSTA ORDNINGEN.

AF

J. MALMQUIST.

Den enklaste klassen af analytiska funktioner utgöres af de entydiga funktionerna och de därmed nära sammanhängande ändligt mångtydiga funktionerna. De viktigaste hittills kända funktionerna af denna klass satisfiera enkla algebraiska differentialekvationer. Det är därför naturligt att ställa sig problemet att undersöka egenskaperna hos de ändligt mångtydiga funktioner, som man öfver hufvud kan träffa på genom integration af algebraiska differentialekvationer. Man har hittills studerat problemet i följande form:

Att studera integralerna till en algebraisk differentialekvation, då man antager att hvarje integral är högst m-värdig.

Detta problem har särskildt behandlats af *Painlevé* under den förutsättningen att differentialekvationen är af första ordningen[1]). De metoder, som han framställt för problemets lösning, och hvilka gå ut på ett studium af den allmänna integralen som funktion af begynnelsevärdena, hafva emellertid endast tillämpats på speciella fall, och det förefaller som de ej skulle leda till problemets allmänna lösning. En sådan lösning erhålles däremot genom en annan metod, som här i korthet skall framställas. Den hvilar på vissa satser af *Boutroux*

[1]) Se *Painlevé: Leçons de Stockholm*, sid. 33—47, samt *Note sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches*, publicerad i *Boutroux*'s bok: *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. *Emile Borel*).

rörande integralernas tillväxt, således på ett fördjupadt studium af integralerna som funktioner af den oberoende variabeln x. Genom denna metod erhåller man dessutom lösningen af ett allmännare problem, nämligen:

Att studera en partikulär integral till en algebraisk differentialekvation af första ordningen, under förutsättning att denna integral är ändligt mångtydig.

För att undvika komplikationer af mera formell natur inskränka vi oss till att studera en differentialekvation af följande form

$$\frac{dy}{dx} = a_0 y^p + a_1 y^{p-1} + \dots + a_p, \tag{1}$$

där $a_0, a_1, \dots a_p$ äro rationella funktioner af x.

Vi erinra först om en grundläggande sats af *Painlevé*, nämligen[1]) om man undantager vissa ställen ξ till ändligt antal, har en godtycklig integral till differentialekvationen (1) endast algebraiska singulariteter. Naturen af dessa singulariteter angifves närmare på följande sätt: om $\bar{x}$ är skild från ställena ξ och singulär punkt för en viss gren y af en integral till ekvationen (1), kan y i närheten af $\bar{x}$ framställas genom en potensserie af formen

$$y = (x - \bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}\left((x - \bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

Vi uttala sedan *Boutroux*'s satser. Vi antaga att ∞ är ett ställe ξ, och vi angifva naturen af integralernas tillväxt i närheten af detta ställe. Af koefficienterna i differentialekvationen (1) kan man bilda tvenne tal τ, τ', af hvilka $\tau < 1$, och ett tal $\bar{h}$ så att följande satser gälla[2]):

1) Om h är ett godtyckligt gifvet positift tal och om $|\bar{x}|$ är större än ett visst tal, som beror af h och af koefficienterna i differentialekvationen, konvergerar den nyss nämnda serien $\mathfrak{P}\left((x - \bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right)$ för $|x - \bar{x}| < h\,|\bar{x}|^\tau$.

2) Om $h > \bar{h}$ och $|x_0|$ är större än ett visst tal, som beror af h och af koefficienterna i ekvationen (1), och om den integral som för $x = x_0$ blir lika med y_0 konvergerar för $|x - x_0| < h\,|x_0|^\tau$, är nödvändigt $|y_0| \leqq |x_0|^{\tau'}$.

Dessa satser te sig mera åskådligt, om man, såsom *Boutroux* gjort, tager i betraktande en Riemann'sk yta hörande till en gifven integral. Kring hvarje singulärt ställe $\bar{x}$ tänker man sig på en sådan yta en

[1]) Se *Leçons de Stockholm*, sid. 23.

[2]) Se *Boutroux's* i noten å föregående sida citerade bok, sid. 47—53.

cirkel med en radie af storleken $h|x|^\tau$, hvarvid $h > \bar{h}$. Af satsen 1) följer att de cirklar, som svara mot tillräckligt stora $|\bar{x}|$, ej hafva någon punkt gemensam. Af satsen 2) följer att olikheten $|y| \leqq |x|^{\tau'}$ gäller utanför dessa cirklar, om $|x|$ är tillräckligt stor.

Vi använda först *Boutroux's* andra sats för att studera en entydig integral till en differentialekvation (1), för hvilken $p > 2$. En sådan integral $f(x)$ kan ej ha andra singulära ställen än ställena ξ, ty om $\bar{x}$ vore ett från dessa ställen skildt singulärt ställe, skulle $f(x)$ ej vara entydig i närheten af $\bar{\bar{x}}$. Eftersom $\tau < 1$, följer häraf, att den potensserie af $x - x_0$ som tillhör $f(x)$ är konvergent för $|x - x_0| < h|x_0|^\tau$, om $|x_0|$ är tillräckligt stor. Alltså kan *Boutroux's* andra sats tillämpas, och man finner att olikheten

$$|f(x)| \leqq |x|^{\tau'}$$

gäller för alla x utanför en viss cirkel. Stället ∞ är således högst en pol för $f(x)$. Detsamma gäller om hvarje ställe ξ. Alltså måste $f(x)$ vara en rationell funktion, och vi erhålla således följande sats:

Om differentialekvationen (1) *ej är en Riccatisk differentialekvation, måste hvarje entydig integral vara en rationell funktion.*

Vi antaga nu att det finns en mångtydig integral $f(x)$, som är ändligt mångtydig; man kan då bevisa följande sats:

Om differentialekvationen (1) *ej kan transformeras till en Riccatisk ekvation*

$$\frac{dz}{dx} = az^2 + bz + c \tag{2}$$

genom en transformation af formen

$$z = \frac{y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \cdots + \alpha_n}{y^{n-p+1} + \beta_p y^{n-p} + \cdots + \beta_n}, \tag{3}$$

hvarvid koefficienterna a, b, c, α_ν, β_ν *äro rationella funktioner af* x, *måste* $f(x)$ *vara en algebraisk funktion.*

Denna sats blir bevisad, om vi, utan att göra någon förutsättning om formen af differentialekvationen (1), utgå från antagandet att $f(x)$ är transcendent och däraf härleda, att ekvationen (1) måste kunna transformeras till en ekvation (2) genom en transformation (3), hvarvid koefficienterna äro rationella funktioner af x.

Tänker man sig att gradtalet p är större än 2, måste $f(x)$, utom ställena ξ, hafva oändligt många singulära ställen, som alla äro alge-

braiska förgreningspunkter; ty om $f(x)$ endast hade ett ändligt antal singulära ställen, skulle man, på samma sätt som i det fall då $f(x)$ var entydig, kunna visa, att $f(x)$ endast hade algebraiska singulariteter, hvaraf skulle följa att $f(x)$ vore en algebraisk funktion. Det är för bevisets skull af vikt att af minsta möjliga antal grenar af $f(x)$ bilda symmetriska kombinationer, som äro entydiga i närheten af de från ξ skilda singulära ställena till $f(x)$. För att åstadkomma detta välja vi x_0 skild från de singulära ställena till $f(x)$ och taga i betraktande de potensserier af $x - x_0$ som tillhöra $f(x)$. De kunna fördelas i grupper, som innehålla samma antal n serier, så att följande villkor äro uppfyllda: man kan komma från ett element till ett annat i samma grupp genom analytisk fortsättning längs en sluten väg, som genom kontinuerlig deformation kan dragas tillsamman till en punkt utan att passera öfver något ställe ξ; däremot kan man på detta sätt ej komma från ett element till ett annat, som tillhör en annan grupp, eller med andra ord, den slutna väg som man måste följa för att komma till sistnämnda element kan ej dragas tillsamman till en punkt utan att passera något ställe ξ. Man använder den terminologien att elementen i en grupp permuteras kring de från ξ skilda singulariteterna och att $f(x)$ antar n värden kring dessa singulariteter.

Vi taga i betraktande elementen i en grupp och bilda de elementarsymmetriska funktionerna af dessa element. Man erhåller på detta sätt element af funktioner $f_1(x), \cdots f_n(x)$, som utom ställena ξ ej hafva andra singulära ställen än poler. Om $\bar{x}$ är en från ställena ξ skild pol för $f_\nu(x)$, är vidare ordningstalet högst lika med $\left[\frac{\nu}{p-1}\right]$, ty den integral, som blir ∞ för $x = \bar{x}$, blir ∞ af ordningen $\frac{1}{p-1}$. Om $\nu < p - 1$ är ordningstalet $\left[\frac{\nu}{p-1}\right]$ lika med noll, hvaraf följer: funktionerna $f_1(x), \cdots f_{p-2}(x)$ hafva inga andra singulära ställen än ställena ξ.

Genom *Boutroux's* satser kan man studera de sistnämnda funktionerna i närheten af ett ställe ξ. Om ∞ är ett ställe ξ, finner man att olikheter af formen

$$|f_\nu(x)| < G|x|^{\nu\tau'} \quad (\nu = 1, \cdots p-2)$$

måste gälla för tillräckligt stora x. Nu är $f_\nu(x)$ ändligt mångtydig, alltså är ∞ på sin höjd en algebraisk singularitet för $f_\nu(x)$. Detsamma gäller om hvarje ställe ξ. Alltså måste *funktionerna* $f_1(x), \cdots f_{p-2}(x)$ *vara algebraiska funktioner.*

För att studera funktionerna $f_{p-1}(x), \cdots f_n(x)$ taga vi i betraktande ett system af differentialekvationer för de elementarsymmetriska funktionerna $z_1, \cdots z_n$ af n integraler till ekvationen (1). Detta system kan skrifvas under formen

$$(4) \quad \frac{dz_\nu}{dx} = -(p-1)\, a_0 z_{p-1} z_\nu + \sum_{\mu=p-1}^{n} \alpha_\mu^{(\nu)} z_\mu + \alpha^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \cdots n),$$

där $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$ äro hela rationella funktioner af $a_0, a_1, \cdots a_p, z_1, \cdots z_{p-2}$.

Vi beteckna med $\bar{z}_1, \cdots \bar{z}_n$ de elementarsymmetriska funktionerna af n element af $f(x)$, som permuteras kring de från ξ skilda singulariteterna, och med $\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)}$, $\bar{\alpha}^{(\nu)}$ de uttryck, som fås om man i $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$ sätter $z_1 = \bar{z}_1, \cdots z_{p-2} = \bar{z}_{p-2}$. Af nyss uttalade resultat följer, att $\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)}$, $\bar{\alpha}^{(\nu)}$ definiera element af algebraiska funktioner, och att detsamma är förhållandet med $\frac{d\bar{z}_1}{dx}, \cdots \frac{d\bar{z}_{p-2}}{dx}$. De $p-2$ första ekvationerna i systemet (4) ge således lineära relationer mellan $\bar{z}_{p-1}, \cdots \bar{z}_n$, hvilkas koefficienter äro element af algebraiska funktioner. Om man, utgående från en af dessa relationer, deriverar och begagnar de sista $n-p+2$ ekvationerna i systemet (4), erhåller man fortfarande en lineär relation mellan $\bar{z}_{p-1}, \cdots \bar{z}_n$, hvars koefficienter äro element af algebraiska funktioner. Det kan hända att denna ej är en följd af de föregående. Genom att fortsätta dessa operationer får man en följd af lineära relationer mellan $\bar{z}_{p-1}, \cdots \bar{z}_n$. Man kan emellertid ej erhålla mer än $n-p+1$ distinkta ekvationer, ty om man finge $n-p+2$ ekvationer som kunde upplösas med afseende på $\bar{z}_{p-1}, \cdots \bar{z}_n$, skulla dessa serier vara element af algebraiska funktioner, och således skulle äfven $f(x)$ vara algebraisk funktion, hvilket strider mot antagandet.

Vi beteckna med π antalet oberoende ekvationer och ersätta i dem $\bar{z}_{p-1}, \cdots \bar{z}_n$ med godtyckliga variabler $z_{p-1}, \cdots z_n$. För att i det följande kunna hänvisa till de så erhållna lineära ekvationerna tänka vi oss dem försedda med numret (5). Antag att de kunna upplösas med afseende på $z_{\mu_1}, \cdots z_{\mu_\pi}$, och beteckna med $\mu'_1, \cdots \mu'_{\pi'}$ dem af talen $p-1, \cdots n$ som återstå, sedan $\mu_1, \cdots \mu_\pi$ tagits bort. Af det sätt på hvilket ekvationerna (5) bildats drager man utan svårighet följande slutsats: Man erhåller en lösning till systemet (4), om man sätter $z_1 = \bar{z}_1, \cdots z_{p-2} = \bar{z}_{p-2}$, och om man för $z_{p-1}, \cdots z_n$ väljer en sådan lösning till ekvationerna (5), som

äfven satisfierar de π' differentialekvationer, hvilka fås om man sätter $z_1 = \bar{z}_1, \ldots z_{p-2} = \bar{z}_{p-2}$ i de mot $\nu = \mu'_1, \ldots \mu'_{\pi'}$ svarande ekvationerna i systemet (4).

Antag att man i dessa π' differentialekvationer ersätter $z_{\mu_1}, \ldots z_{\mu_\pi}$ med de uttryck, som man får om man upplöser ekvationerna (5). Man erhåller sålunda ett system af formen

$$(6) \quad \frac{dz_{\mu'_\nu}}{dx} = -(p-1)\,a_0\,z_{p-1}\,z_{\mu'_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{\pi'} b_\lambda^{(\nu)} z_{\mu'_\lambda} + b^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots \pi')$$

där $b_\lambda^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}$ äro rationella funktioner af $a_0, a_1, \ldots a_p, \bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-2}$ och deras derivator och således definiera element af algebraiska funktioner. I högra membra ingår z_{p-1}; man visar att det är tillåtet att antaga att $p-1$ är ett af talen $\mu'_1, \ldots \mu'_{\pi'}$, antag $p-1 = \mu'_1$. Det nyss uttalade resultatet kan nu äfven uttalas på följande sätt: om $z_{\mu'_1}, \ldots z_{\mu'_{\pi'}}$ är en lösning till systemet (6), och om $z_{\mu_1}, \ldots z_{\mu_\pi}$ bestämmas genom ekvationerna (5), är $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-2}, z_{p-1}, \ldots z_n$ en lösning till systemet (4). Häraf följer, att hvarje lösning till ekvationen

$$(7) \quad y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \ldots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + z_{p-1} y^{n-p+1} + \ldots + z_n = 0$$

satisfierar ekvationen (1). Lösningen af ekvationen (1) är således, genom ekvationerna (5) och (7), återförd till lösningen af systemet (6).

Man kan nu visa att systemet (6) måste reducera sig till en enda differentialekvation. Man visar att den allmänna integralen till systemet (6) kan skrifvas under formen $\frac{\varphi_\nu C + \psi_\nu}{C + \chi}$ $(\nu = 1, \ldots \pi')$ där C är en integrationskonstant och φ_ν, ψ_ν, χ äro funktioner af x och af de återstående integrationskonstanterna, och man inser häraf, att den allmänna integralen till ekvationen (1) kan skrifvas under formen

$$(8) \quad y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \ldots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + \sum_{\nu=p-1}^{n} \frac{\alpha_\nu C + \beta_\nu}{C + \gamma} y^{n-\nu} = 0,$$

där α_ν, β_ν, γ äro vissa funktioner af x. Man visar att dessa funktioner, utom ställena ξ, ej hafva andra singulära ställen än poler. Om nu systemet (6) ej reducerade sig till en enda differentialekvation, skulle man, såsom lätt visas, kunna finna tvenne olika former (8) för den allmänna integralen till ekvationen (1), hvilka icke kunde öfverföras i

hvarandra genom en lineär transformation af integrationskonstanten. Om man förbinder de bägge integrationskonstanterna på lämpligt sätt skulle venstra membra i de bägge ekvationerna af formen (8) hafva en gemensam divisor af ett gradtal som är mindre än n. Koefficienterna i denna divisor äro funktioner af x, som utom ställena ξ ej hafva andra singulära ställen än poler. Alltså skulle hvarje integral, och speciellt $f(x)$, antaga färre än n värden kring de från ξ skilda singulariteterna. Men detta strider mot definitionen af n. Denna motsägelse visar, att systemet (6) måste reducera sig till en enda differentialekvation, d. v. s. att $\pi' = 1$ och således $\pi = n - p + 1$.

Man inser omedelbart, att den ekvation, till hvilken systemet (6) reducerar sig, är en Riccatisk ekvation. Koefficienterna i denna ekvation, liksom i de lineära uttryck, som fås om ekvationerna (5) upplösas med afseende på $z_p, \dots z_n$, äro algebraiska funktioner. Genom ett bevis liknande det nyss skisserade visar man, att dessa funktioner äro entydiga, och således rationella. Härmed är vår sats bevisad.

Vi anmärka slutligen, att man genom en obetydlig komplettering af denna bevismetod äfven kan komma till en allmännare sats. Vi taga i betraktande ett ställe ξ och en omgifning kring detta ställe samt definiera en gren $f(x)$ af en integral genom att, utgående från ett element, hvars medelpunkt ligger inom denna omgifning, fortsätta på alla möjliga olika sätt *inom* samma omgifning. Vi antaga att denna gren är ändligt mångtydig. Då gäller följande sats:

Om differentialekvationen (1) *ej kan transformeras till en Riccatisk ekvation på det sätt som angafs i förra satsen måste* $f(x)$ *vara af algebraisk karaktär i närheten af stället* ξ.

OM IDENTITETEN AF DEN FREDHOLMSKE DETERMINANT OG EN UENDELIG v. KOCH'SK DETERMINANT[1]).

AF

JOHANNES MOLLERUP.

I en nylig fremkommen Afhandling *(Bulletin des sciences, Mélanges 8, (1911))* har jeg anvendt følgende Metode til Bestemmelse af en usymmetrisk Kernes fuldstændige Orthogonalsystem; i et specielt Tilfælde af den Fredholmske Ligning skyldes Metoden *Erhard Schmidt* (Math. Anm. 64, 164).

Lad den homogene Ligning være

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

hvor $K(st)$ er integrabel i Omraadet $a \leq {s \atop t} \leq b$, og lad $\beta_1(s)\,\beta_2(s)\cdots$ være et fuldstændigt Orthogonalsystem. Efter den saakaldte Parseval'ske Formel har man, naar $\varphi(s)$ tilfredsstiller (1)

$$\varphi(s) = \lambda \sum_l \int_a^b K(st)\,\beta_l(t)\,dt \cdot \int_a^b \varphi(t)\,\beta_l(t)\,dt = \lambda \sum_l \alpha_l(s)\,\rho_l, \tag{2}$$

i det vi sætter

$$\alpha_l(s) = \int_a^b K(st)\,\beta_l(t)\,dt \quad \text{og} \tag{3}$$

$$\rho_l = \int_a^b \varphi(t)\,\beta_l(t)\,dt. \tag{4}$$

---

[1]) Denne Afhandling fremkommer samtidig i »Bulletin des sciences«.

Rækken (2) konvergerer absolut og ligeligt. Ved at indsætte $\varphi(s)$ faar man

$$(5)\qquad \rho_i = \int_a^b \beta_i(t) \sum_j{}' \lambda\, \alpha_j(t)\, \rho_j = \lambda \sum_j{}' \rho_j \int_a^b \beta_i(t)\, \alpha_j(t)\, dt = \lambda \sum_j{}' \rho_j\, a_{ji},$$

hvor

$$(6)\qquad a_{ji} = \int_a^b \alpha_j(s)\, \beta_i(s)\, ds = \int_a^b \int_a^b K(st)\, \beta_j(t)\, \beta_i(s)\, ds\, dt.$$

Determinanten for de homogene Ligninger

$$(5)\qquad \rho_i = \lambda \sum_j{}' \rho_j\, a_{ji} \quad \text{er}$$

$$(7)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & -\lambda a_{31} \cdots \\ -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & -\lambda a_{32} \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Efter en Sætning af *Helge v. Koch* (Rend. di Palermo XXVIII) vil denne Determinant konvergere absolut, naar Rækkerne

$$\sum_{j,i}{}' a_{ji}^2 \quad \text{og} \quad \sum_i{}' |a_{ii}|$$

konvergerer. Nu har man, ligesom hos *Hilbert* (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, fünfte Mittheilung, Göttinger Nachrichten 1906, 446)

$$(8)\qquad \sum_{ji}{}' a_{ji}^2 = \int_a^b \int_a^b K(st)^2\, ds\, dt.$$

Hvad Konvergensen af Rækken $\sum_{ii}{}' |a_{ii}|$ angaar, da gaar vi over til den itererede Kerne; denne bestemmes ved at indsætte $\varphi(s)$ under Integraltegnet:

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(st)\, K(tu)\, \varphi(u)\, du\, dt \\ \qquad = \lambda^2 \int_a^b K_2(su)\, \varphi(u)\, du, \qquad \text{hvor} \end{cases}$$

$$(10)\qquad K_2\, su) = \int_a^b K(st)\, K(tu)\, du.$$

Erstatter vi nu $K(st)$ med $K_2(st)$, bliver

$$(11)\begin{cases} a_{ii} = \int_a^b\int_a^b K_2(su)\,\beta_i(u)\,\beta_i(s)\,ds\,du = \int_b^b\int_a^b\int_a^b K(st)K(tu)\,\beta_i(u)\,\beta_i(s)\,ds\,dt\,du \\ = \int_a^b\left\{\int_a^b K(st)\,\beta_i(s)\,ds\cdot\int_a^b K(tu)\,\beta_i(u)\,du\right\}dt. \end{cases}$$

Heraf faar vi

$$(12)\qquad \sum_i{}' a_{ii} = \int_a^b\int_a^b K(st)\,K(ts)\,ds\,dt,$$

hvor Rækken konvergerer absolut. Det er altsaa bevist, at *den til den itererede Kerne $K_2(st)$ hørende Determinant $\Delta(\lambda)$ konvergerer absolut.* De Værdier af λ, for hvilke Ligningerne (5) kan løses, bestemmes af

$$(13)\qquad \Delta(\lambda) = 0,$$

naar $\Delta(\lambda)$ antages at konvergere absolut. Naar λ er fundet, finder vi Konstanterne ρ ved Ligningerne (5); har $\Delta(\lambda)$ Defekten p, da har Ligningerne (5) p lineært uafhængige Løsninger; en saadan Løsning ρ_i har altid konvergent Kvadratsum $\sum_i{}' \rho_i^2$. Af Ligningen

$$(2)\qquad \varphi(s) = \lambda\sum_i{}' \alpha_i(s)\cdot\rho_i$$

finder vi endelig de søgte Funktioner $\varphi(s)$; Rækken konvergerer absolut og ligeligt, fordi

$$\sum_i{}' \alpha_i(s)\cdot\rho_i = \sum_i{}'\int_a^b K(st)\,\beta_i(t)\,dt\cdot\rho_i,$$

hvor Kvadratsummerne

$$\sum_i{}'\left(\int_a^b K(st)\,\beta_i(t)\,dt\right)^2 = \int_a^b K(st)^2\,dt \quad\text{og}\quad \sum_i{}'\rho_i^2$$

konvergerer.

De fundne Løsninger $\varphi(s)$ er altsaa kontinuerte.

Er Kernen *symmetrisk*, $K(st) = K(ts)$, bliver $\Delta(\lambda)$ symmetrisk, da

$$a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st)\,\beta_j(t)\,\beta_i(s)\,ds\,dt = a_{ij}.$$

Hvis i dette Tilfælde λ er et Nulpunkt for den hele Funktion $\Delta(\lambda)$ med Multipliciteten p, da har $\Delta(\lambda)$ netop Defekten p, og Ligningerne (5) har p lineært uafhængige Løsninger.

I det foregaaende har vi egentlig i Stedet for (1) løst Ligningen

$$(9) \quad \varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b K_2(st)\,\varphi(t)\,dt;$$

men sætter vi ligesom *Erhard Schmidt* (Entwicklung willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 63, 448)

$$2X_1(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt$$

$$2X_2(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt,$$

altsaa

$$\varphi(s) = X_1(s) + X_2(s), \quad \text{da er } X_1(s) \text{ og } X_2(s),$$

der ikke begge forsvinder identisk, Løsninger af (2).

Den hele Funktion $\Delta(\lambda)$ har naturligvis de samme Nulpunkter som den Fredholmske Determinant $D_{\lambda K}$,

$$D_{\lambda K} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) \cdots & K(s_1 s_p) \\ K(s_2 s_1) & K(s_2 s_2) \cdots & K(s_2 s_p) \\ \vdots & & \\ K(s_p s_1) & K(s_p s_2) \cdots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \cdots ds_p$$

Men *de hele Funktioner* $\Delta(\lambda)$ og $D_{\lambda K}$ *er i Virkeligheden identiske*, og saaledes er efter vort Skøn Fredholms geniale Idé rykket os nærmere. Til Bevis benytter vi en Integralformel. Vi har

$$\int_a^b K(s_1 s_2)\,K(s_2 s_3)\,ds_2 = \sum_i \int_a^b K(s_1 s_2)\beta_i(s_2)ds_2 \cdot \int_a^b K\,s_2\,s_3)\,\beta_i(s_2)\,ds_2,$$

hvor Rækken konvergerer absolut og ligeligt. Heraf faar vi igen.:

$$\int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, K(s_3 s_4)\, ds_2\, ds_3$$

$$= \sum_i \int_a^b K(s_1 s_2)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s_2 s_3)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot K(s_3 s_4) \right\} ds_3,$$

hvor

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(s_2 s_3)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot K(s_3 s_4) \right\} ds_3$$

$$= \sum_j \int_a^b \int_a^b K(s_2 s_3)\, \beta_i(s_2)\, \beta_j(s_3)\, ds_2\, ds_3 \cdot \int_a^b K(s_3 s_4)\, \beta_j(s_3)\, ds_3$$

$$= \sum_j a_{ji} \cdot \int_a^b K(s_3 s_4)\, \beta_j(s_3)\, ds_3$$

og altsaa

$$\int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, K(s_3\, s_4)\, ds_2\, ds_3$$

$$= \sum_{ij} \int_a^b K(s_1 s_2)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot a_{ij} \cdot \int_a^b K(s_3 s_4)\, \beta_j(s_3)\, ds_3.$$

Paa samme Maade faar man

$$\int_a^b \int_a^b \int_a^b K s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, K(s_3 s_4)\, K(s_4 s_5)\, ds_2\, ds_3\, ds_4$$

$$= \sum_{i,j,k} \int_a^b K(s_1 s_2)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot \int_a^b K(s_4 s_5)\, \beta_k(s_4)\, ds_4.$$

Naar man fortsætter paa denne Maade, finder man den søgte Formel

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3) \cdots K(s_n s_1)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_n \\ &\qquad = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 i_2}\, a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_n i_1}, \end{aligned}\right.$$

hvor $i_1\, i_2 \cdots i_n$ uafhængig af hinanden gennemløber alle Tallene i den naturlige Talrække.

For $\Delta(\lambda)$ har man Udviklingen

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{i}{}' a_{ii} + \lambda^2 \sum_{i,j}{}' \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} - \lambda^3 \sum_{i,j,k}{}' \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$(i < j < k \cdots)$$

eller

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{r_1}{}' a_{r_1 r_1} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{r_1, r_2}{}' \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} \\ a_{r_2 r_1} & a_{r_2 r_2} \end{vmatrix} - \cdots (-1) \frac{\lambda^p}{p!} \sum_{r_1 r_2 \ldots r_p}{}' \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} & \cdots & a_{r_1 r_p} \\ \vdots & & & \\ a_{r_p r_1} & a_{r_p r_2} & \cdots & a_{r_p r_p} \end{vmatrix}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

hvor $r_1, r_2 \cdots$ uafhængig af hinanden gennemløber den naturlige Talrække, og ikke behøver at være forskellige. Man skal altsaa bevise Formlen

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) & \cdots & K(s_1 s_p) \\ \vdots & & & \\ K(s_p s_1) & K(s_p s_2) & \cdots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \cdots ds_p \\ & = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_p}{}' \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} & \cdots & a_{r_1 r_p} \\ \vdots & & & \\ a_{r_p r_1} & a_{r_p r_2} & \cdots & a_{r_p r_p} \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

Vi betragter et vilkaarligt Led paa venstre Side af (15):

$$\pm \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s_1 s_{i_1}) K(s_2 s_{i_2}) \cdots K(s_p s_{i_p}) \, ds_1 \, ds_2 \cdots ds_p;$$

dette Led vil være lig med Summen af de tilsvarende Led paa højre Side d. v. s. lig med

$$\pm \sum_{r_1 r_2 \ldots r_p}{}' a_{r_1 r_{i_1}} a_{r_2 r_{i_2}} \cdots a_{r_p r_{i_p}},$$

hvor $r_1 r_2 \cdots r_p$ uafhængig af hinanden gennemløber den naturlige Talrække.

For at se dette dekomponerer man de tilsvarende Produkter

$$K(s_1 s_{i_1})\, K(s_2 s_{i_2}) \cdot \cdots K(s_p s_{i_p}) \quad \text{og} \quad a_{r_1 r_{i_1}}\, a_{r_2 r_{i_2}} \cdot \cdots a_{r_p r_{i_p}}$$

i tilsvarende cirkulære Produkter:

$$\{A_1\}\,\{A_2\} \cdot \cdots \{A_m\} \quad \text{og} \quad \{\alpha_1\}\,\{\alpha_2\} \cdot \cdots \{\alpha_m\}.$$

Man har da efter (14):

$$\int_a^b \int_b^b \cdots \int_a^b \{A_1\}\,\{A_2\} \cdots \{A_m\}\, ds_1\, ds_2 \cdots ds_p$$

$$= \sum{}' \{\alpha_1\} \sum{}' \{\alpha_2\} \cdots \sum{}' \{\alpha_m\} = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_p}{}' \{\alpha_1\}\,\{\alpha_2\} \cdots \{\alpha_m\},$$

hvilket skulde bevises.

Man lægger Mærke til, at Formlerne (2) og (14) ogsaa gælder, naar $K(st)$ er symmetrisk: $K(st) = K(ts)$ og $\beta_1(s), \beta_2(s) \cdot \cdots$ danner Kernens fuldstændige Orthogonalsystem (efter den *Hilbert—Schmidtske* Udviklingssætning). Men da har man

$$a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st)\, \beta_j(t)\, \beta_i(s)\, ds\, dt = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \dfrac{1}{\lambda_i} & j = i. \end{cases}$$

Hvis nu Rækken $\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|}$ konvergerer, faar vi

$$(16) \qquad \Delta(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = D_{\lambda K}.$$

Da Rækkerne $\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|^n}$ konvergerer for $n \geq 2$, faar man

$$(17) \qquad \Delta(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda^n}{\lambda_i^n}\right) = D_{\lambda K_n},$$

hvor K_n er en vilkaarlig itereret Kerne. Jeg tror, at disse Resultater er nye for $n = 1$ og $n = 2$ (sml. *Hans Hahn*, Bericht über die Theorie der lin. Integralgleichungen, Erster Teil, pag. 30).

DEN ANALYTISKA LÖSNINGEN AV BANBESTÄMNINGSPROBLEMET.

AV

C. V. L. CHARLIER.

ÄMNET för detta föredrag var att undersöka banelementerna som funktioner av mellantiderna mellan 3ne givna observationer.

(Förf. hänvisar till den framställning han givit av ämnet i Arkiv för Mat. etc. Bd. 7 Nris 5, 10, 16 samt till Monthly Notices of the R. Astr. Soc. Dec. 1910 och Mars och Juni 1911).

OM ALGEBRAISKE OG IKKE-ALGEBRAISKE FLADER.

AF

C. JUEL.

Det nittende Aarhundredes Geometri har væsentlig holdt sig til algebraiske Kurver, Flader og Korrespondentser. Dette er dog ikke at forstaa i streng Forstand. Infinitesimalgeometrien er jo endog udviklet i høj Grad, og dens Forudsætninger er jo saa at sige overalt videre end de, der begrænses af algebraiske Betingelser.

Derimod er der en anden Side ved de algebraiske Dannelsers Theori, som synes uadskilleligt knyttet til algebraiske Ligningers Grader, nemlig de Sætninger, som angiver Antallet af Løsninger paa visse Opgaver. Skøndt det Emne, jeg i det følgende skal gaa ind paa, ikke direkte giver Bidrag i denne Retning, hænger det dog saa nøje sammen dermed, at jeg er nødt til at begynde dermed.

Mine Undersøgelser herom gaar langt tilbage og har til Udgangspunkt Bestemmelsen af Formerne af hvad jeg dengang kaldte grafiske Kurver af 3die og 4de Orden. Ved en Kurves Orden (Realitetsorden) forstaar jeg det højeste og tillige opnaaelige Antal af Skæringspunkter mellem Kurven og en ret Linie. I Definitionen medoptages den Fordring, at en ret Linie, der har flere Punkter fælles med Kurven end dens Orden angiver, med alle sine Punkter hører med til Kurven; denne Fordring er opfyldt af sig selv, naar Kurven forudsættes analytisk og overalt regulær; at dette Kurvebegreb dog er videre end det egentlig algebraiske, følger af, at en Kurve af en bestemt Realitetsorden algebraisk kan være af en vilkaarlig høj Orden. Hvad den ovennævnte Formbestemmelse af Kurverne af 3die og 4de Orden angaar, kan man dog nøjes med langt snevrere Betingelser end den, at Kurven skal være analytisk, men jeg skal ikke gaa ind derpaa.

Foruden de plane Kurver har jeg ogsaa betragtet Rumkurver definerede paa en lignende Maade. I den senere Tid er jeg gaaet ind paa en analog Behandling af Flader efter jeg ved den skandinaviske Matematikerkongres i Stockholm 1909 havde fremsat mine første Forsøg i den Retning.

Jeg har særlig undersøgt Fladerne af 3die Orden og fundet, at den sædvanlige og velkendte Theori for rette Linier beliggende paa en algebraisk Flade af tredie Orden ogsaa er gyldig for enhver analytisk Flade af denne Orden. I det følgende vil jeg gaa ud fra denne Sætning, idet jeg dog kun benytter den for det Tilfælde, at Fladen er analytisk og overalt regulær. Som Eksempel kan nævnes en Flade med Ligningen $xy = z^5 + z^3 + 1$.

Den Opgave, jeg her skal ind paa, er den at finde de reelle Skæringspunktsbetingelser, man endnu skal føje til de ovennævnte, for at Fladen skal blive en algebraisk Flade af 3die Orden.

Man kan sige, at man herigennem faar en ny Vej, ad hvilken man systematisk kunde komme til Theorien for algebraiske Flader i hvert Fald af de lavere Ordener. En saadan Theori er hidtil opstillet ad to Veje dels ad en ren geometrisk dels ad analytisk-geometrisk Vej. Disse Metoder er væsentlig ens, selv om det endnu ikke er lykkedes at lade dem gaa ganske parallelt med hinanden. Algebraiske Polynomier af højere Orden danner man nemlig af dem af lavere Orden ved sukcessive Additioner og Multiplikationer, og det er i Virkeligheden det samme, man gør, naar man definerer Flader og Kurver af højere Orden som geometrisk Sted for Skæringspunkterne mellem tilsvarende Elementer i projektive Bundter eller Næt.

Efter den Fremgangsmaade, jeg her henstiller som en Mulighed, bærer man sig helt anderledes ad, idet man dog derved begrænser sig til reelle Flader. Man begynder med Flader af en bestemt Realitetsorden, af en mere eller mindre almindelig Beskaffenhed, siger saa meget man kan om den, og tilføjer dernæst indskrænkende Betingelser, saa at Fladen bliver algebraisk.

For Flader af anden Orden vil man saaledes begynde med en vilkaarlig lukket og kontinuert Flade, der har højest to Punkter fælles med en ret Linie. Om en saadan Flade kan der allerede siges en hel Del; jeg kan henvise til Prof. *Bruun*: »Über Ovale und Eiflächen«. Tilføjer man dernæst den Betingelse, at Fladen skal indeholde alle Punkter af én ret Linie, maa Fladen nødvendigvis være en algebraisk vindskæv Flade af anden Orden.

Den almindelige algebraiske Kurve af 2den Orden kan dernæst defineres som Slutningslinien mellem den nævnte vindskæve Flade og en Plan. Om denne Definition stemmer med den sædvanlige, kan naturligvis kun afgøres, naar man i Forvejen kender saadanne Kurver, altsaa i Forvejen véd, at den f. Eks. er bestemt med 5 vilkaarlige Punkter eller lignende.

Dernæst kan man definere den almindelige algebraiske Flade af anden Orden som den Flade, der af en vilkaarlig Plan skærer en algebraisk Kurve af anden Orden.

Naar man nu vil gaa over til Flader af tredie Orden, vil man atter begynde med den almindeligste lukkede kontinuerte Flade, hvis Realitetsorden er 3. Om denne kan man sige noget, men ganske vist i dette Øjeblik ikke meget. Tilføjer man den Begrænsning, at Fladen skal være analytisk og overalt regulær, er det endnu ikke nødvendig, at Fladen er en algebraisk Flade af 3die Orden. Om denne Flade kan man allerede opstille en Theori om de paa Fladen liggende rette Linier. *Men tilføjer man nu yderligere den Skærings-punktsbestemmelse, at Fladen af et Keglesnit højest skal skæres i 6 Punkter (medmindre da Keglesnittet helt ligger paa Fladen), maa denne i Almindelighed være algebraisk.*

De Undtagelsestilfælde, som nødsager mig til at sige »i Almindelighed« er de, hvor enten Fladen er vindskæv eller hvor den kun indeholder saadanne rette Linier, langs hvilke den berøres af en og samme Plan ɔ: hvor alle rette Linier paa Fladen giver udfoldelige Elementer.

Vi gaar altsaa i Henhold til vor postulerede Theori for de paa Pladen liggende rette Linier ud fra, at der findes en Plan, der skærer Fladen G^3 i tre adskilte rette Linier a, b og c. Gennem a lægges en Plan π, der skærer G^3 foruden i a i en Oval ω. Planen kan altid vælges saaledes, at ω skærer a i to Punkter; ellers vilde nemlig a slet ikke ligge paa Fladen. Hvis ω ikke skulde være en elliptisk Oval d. v. s. ligge helt i det endelige, kan dette altid opnaas ved en reel Kollineation, der lader a blive liggende. Vi kan dernæst lægge et Keglesnit K, der gaar gennem 5 Punkter af ω, hvoraf de to ligger paa den ene Side og de tre andre paa den anden Side af ω. Ifald K nu er en Ellipse eller en Parabel, vil den skære a i to Punkter, altsaa Fladen i flere end 6 Punkter; ω maa derfor falde sammen med K. Men det samme maa ogsaa være Tilfældet, ifald K skulde være en Hyperbel. Dette er nemlig i hvert Fald Tilfældet, naar de 5 Punkter ligger paa samme Hyperbelgren. Men de *maa* ligge paa

samme Gren, thi naar en elliptisk Oval skærer begge Grenene af en Hyperbel, kan der hverken være flere eller færre end 4 Skæringspunkter. Ifald der nemlig var flere, maatte der nødvendigvis findes Fællestangenter. En Tangent m til Hyperblen kan imidlertid umuligt ogsaa være Tangent til Ovalen, thi da denne ligger helt i det endelige, maa alle Ovalens Punkter ligge paa en og samme Side af m, medens Hyperblens to Grene ligger paa hver sin Side af m.

Vi har altsaa set, at en vilkaarlig Plan, der berører Fladen i et Punkt af a, maa skære i et Keglesnit. Gennum a gaar nu efter Forudsætningerne en Plan μ_1, der skærer i 3 rette Linier a, b og c. En Plan α gennem a, der ligger nær ved μ_1, maa være en Plan, der skærer i et Keglesnit, thi μ_1 skærer i de to rette Linier b og c, der skærer a. Det gør intet til Sagen, om de tre rette Linier gaar gennem samme Punkt; i saa Fald bliver μ_1 en Grænsestilling for Planer, der har (reelle) Røringspunkter med Fladen. Vælges et passende Punkt P paa α i Nærheden af μ_1, vil ligeledes Planerne (Pb) og (Pc) skære G^3 i Keglesnit henh. β og γ. Punkt P er valgt passende nær ved μ_1, naar en Plan f. Eks. gennem b ved at drejes ud fra Stillingen μ_1 til (bP) ikke har overskredet en fra μ_1 forskellig Stilling, hvor Planens Snit i Fladen skærer b i to sammenfaldende Punkter. Gennem de tre Keglesnit α, β, γ og Linierne a, b, c gaar to algebraiske Flader af 3die Orden, den ene dannet af de tre Planer (Pa), (Pb) og (Pc), den andet dannet af Planen μ_1 i Forbindelse med den Keglesnitsflade, der gaar gennem α, β, γ; disse sidste har nemlig parvis to Punkter fælles. Man vælger nu et Punkt Q paa den givne Flade G^3, der atter ligger i Nærheden af μ_1, men ikke ligger paa α, β eller γ. Der findes da en enkelt aldeles bestemt Flade i det af de to ovennævnte bestemte Bundt, der gaar gennem Q. Denne algebraiske Flade F^3 maa falde sammen med den givne G^3. Lad os nemlig betragte Bundtet af de Planer μ, der gaar gennem a og endnu skærer G^3 i Ovaler, der har to Punkter fælles med a. En saadan *kontinuert* Samling af Planer μ har man i hvert Fald, naar man medtager μ_1 i Samlingen (eventuelt som en Grænsestilling). Alle de nævnte Planer skærer G^3 i Keglesnit, og disse maa falde sammen med de Keglesnit, hvori Planerne skærer F^3. For det første maa nemlig det Keglesnit γ_1, hvori Planen (Qc) skærer G^3 ogsaa ligge paa F^3, da det har 5 Punkter fælles med F^3: Punktet Q og de Punkter, hvori Planen skærer α og β. Dernæst maa en vilkaarlig Plan μ skære F^3 og G^3 i samme Keglesnit, da disse har de 6 Punkter fælles, hvori μ skære β, γ og γ_1. Fladerne G^3 og F^3 har altsaa et sammenhængende kontinuert Flade-

stykke fælles og de maa derfor falde helt sammen, da de begge er analytiske og overalt regulære (med eventuel Undtagelse af diskret liggende Punkter).

Man kan dernæst definere plane Snit i den konstruerede algebraiske Flade som almindelige plane Kurver af 3die Orden, og endelig den almindelige algebraiske Flade af 3die Orden som den, hvis plane Snit er de nævnte Kurver. Om man vil, kan man jo endnu medtage plane Kurver af fjerde Orden og definere dem som Konturen af Projektionen af en algebraisk Flade af tredie Orden fra et Punkt af selve Fladen. At dette virkelig er den almindelige plane algebraiske Kurve af fjerde Orden i sædvanlig Forstand, kan man naturligvis kun bevise, naar man i Forvejen ved, hvad man vil forstaa ved en saadan Kurve [1]). Dernæst kan den almindelige Flade af fjerde Orden defineres som den Flade, der af en vilkaarlig Plan skærer i en Kurve af fjerde Orden.

Jeg skal endnu omtale et andet Eksempel paa en lignende Definition nemlig af de anallagmatiske Flader. En saadan defineres i de algebraiske Fladers Theori som en algebraisk Flade af fjerde Orden, der har den uendelige fjerne Kuglecirkel til Dobbeltkurve. Men ogsaa den kan defineres ved først at gaa ud fra en analytisk med Undtagelse af diskret liggende Punkter overalt regulær Flade og tilføje en passende Antalsbestemmelse. En saadan, som man i hvert Fald kunde forsøge, har man deri, at en vilkaarlig Cirkel skærer Fladen algebraisk talt i fire Punkter, en Egenskab, disse Flader ganske vist deler med Keglesnitsfladerne.

Jeg er oprindelig kommen ind paa denne Opfattelse ved at søge at udvide mine Undersøgelser over plane cykliske Kurver [2]), der at enhver reel Cirkel skærer i højest 4 reelle Punkter, til Rummet. Det nævnte Sted viste jeg, at der existerer analytiske men ikke algebraiske cykliske plane Kurver. Det er tilstrækkeligt som Eksempel at nævne en ydre Parallelkurve til en Ellipse. For Rummet viser det sig nu, at Sagen stiller sig anderledes.

Lad os tage en analytisk Flade, om hvilken vi forudsætter, at den af enhver reel Cirkel skærer i højest 4 Punkter — medmindre da Cirklen ligger helt paa Fladen — og lad os invertere denne Flade om et Punkt P af selve Fladen som Inversionscentrum. Man maa da faa en analytisk Flade G^3, der maa være af 3die Orden. Denne vil

---

1) Selve den angivne Sætning er bevist f. Eks. af *Geisér* (Mathematiske Ann. Bd. 1).

2) Kgl. D. Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Række, Ntv. og M. Afd. VIII. 6. (1911).

indeholde den uendelig fjerne rette Linie u beliggende i den oprindelige Flades Tangentplan i Punktet P. Gennem u vil der efter den her forudsatte Theori for Flader af tredie Orden gaa mindst én Plan, der skærer Fladen G^3 i tre rette Linier, af hvilke dog to eller ogsaa alle tre kan falde sammen. Nu kan imidlertid selve Linien u, som man let sér, ikke være dobbelt paa den nysnævnte Maade, medmindre P er valgt som et Kuglepunkt, hvad vi kan antage ikke at være Tilfældet. Om den oprindelige cykliske Flade véd vi derfor (ved Inversion), at der gennem P gaar to Cirkler paa Fladen, der enten er adskilte eller sammenfaldende. I det sidste Tilfælde har Beviset for den Sætning, vi vil udvikle, ingen Gyldighed. Vi vil derfor i det følgende forudsætte, at der ikke gennem P gaar nogen cirkulær Krumningslinie — medmindre der da tillige gennem P gaar andre adskilte Cirkler paa Fladen; her maa man erindre, at P kan vælges som et vilkaarligt Punkt paa Fladen.

Vi vil nu holde os til den cykliske Flade G^3 af 3die Orden. Paa denne findes to adskilte Linier a og b beliggende i en Plan μ_1, hvis uendelig fjerne rette Linie ligeledes ligger paa Fladen.

Man kan dernæst let vise, at enhver gennem a gaaende Plan μ, der ligger nær ved μ_1, foruden i a vil skære Fladen i en Cirkel α. (En Plan μ siges at ligge nær ved μ_1, naar man kan dreje en Plan fra Stillingen μ_1 til Stillingen μ_1 uden at overskride Tangentplanen i et parabolsk Punkt). Selve Planen μ_1 skærer foruden i a i en udartet Cirkel dannet af Linien b og den uendelig fjerne rette Linie u. Planen μ vil derfor foruden i a i hvert Fald skære i en Oval, der har to Punkter fælles med a. Vælges nu paa Ovalen tre Punkter, der ikke alle ligger paa samme Side af a, vil en Cirkel gennem disse 3 Punkter skære a i 2 Punkter og Fladen altsaa i mindst 5 Punkter; Cirklen maa derfor ligge paa Fladen. Paa samme Maade ser man, at enhver Plan μ' gennem b, der er nær ved μ_1, vil skære Fladen i en Cirkel β. Skæringslinien s mellem Planen for en Cirkel α og Planen for en Cirkel β ligger lige saa nær, man selv vil, ved Planen μ_1, og denne gaar gennem et Røringspunkt (ab) mellem Fladen og denne Plan. Linien s vil derfor skære Fladen i to reelle Punkter foruden i (ab), hvoraf følger, at en Cirkel α maa skære enhver Cirkel β indenfor et vist kontinuert Omraade for α og β.

Vælges nu tre faste Cirkler β i dette Omraade, kan man gaa ud fra, at ikke to af disse har to Punkter fælles, thi i saa Fald vilde en Kugle være en Del af cykliske Flade; denne maatte da bestaa af en Kugle og en Plan. Udelukkes dette Tilfælde, ser man let, at Be-

tingelsen for at uendelig mange Cirkler α skærer de 3 Cirkler β — hvis Planer alle gaar gennem en i det *endelige* liggende ret Linie b — er den, at Cirklerne β skærer b i 3 involutoriske Punktpar. Men da vil en enkelt uendelig Samling af Cirkler α skære de 3 Cirkler β, og ved denne algebraisk bestemte Bevægelse bestemmes en algebraisk Flade. Denne maa imidlertid falde sammen med den givne, da de to analytiske med Undtagelse af diskrete Punkter overalt regulære Flader har et endeligt Fladestykke fælles.

Vi har altsaa bevist:

En reel analytisk med eventuel Undtagelse af diskret liggende Punkter overalt regulær Flade, der af enhver reel Cirkel højst skærer i 4 reelle Punkter maa nødvendigvis være algebraisk, saafremt den ikke har cirkulære Krumningslinier.

Om Sætningen ogsaa skulde være gyldig i det nævnte Undtagelsestilfælde, der jo indbefatter Omdrejningsflader og de deraf ved Inversion udledede, kan jeg ikke sige bestemt i dette Øjeblik.

Der er dog et Tilfælde, hvor Sætningen er almengyldig, nemlig *naar Fladen har to reelle Dobbeltpunkter.*

Forbindes nemlig disse to Punkter med et vilkaarligt Punkt af Fladen ved en Cirkel, har denne 5 Punkter fælles med Fladen og maa derfor ligge helt i denne. Inverterer man nu om det ene af Dobbeltpunkterne som Inversionscentrum, faar man en saadan Kegle med Toppunkt i det andet Dobbeltpunkts inverse Punkt, som af enhver reel Cirkel højest skærer i 4 Punkter. Men en saadan Kegle maa være en Keglesnitskegle, da den ogsaa af ethvert reelt Keglesnit højest vil kunne skæres i 4 reelle Punkter (med mindre Keglesnittet ligger paa Keglen). Dette følger deraf, at enhver reel Keglesnitskegle altid har reelle cirkulære Snit.

Vi har i det ovenstaaende med den nævnte Undtagelse bevist, at cykliske Flader maa være algebraiske forsaavidt de er analytiske og regulære. Men naturligvis eksisterer ikke-analytiske cykliske Flader. Man kan saaledes let konstruere en Oval dannet af 4 Cirkelbuer og sørge for, at den faar en Symmetriakse. Drejer man denne Oval om Aksen, faar man en Flade, som man let kan bevise højest kan have 4 Punkter fælles med enhver Cirkel, der ikke har uendelig mange Punkter fælles med Fladen. Denne er en afdelingsvis analytisk, men er i sin Helhed en ikke-analytisk cyklisk Flade.

OM TELEGRAFISTEKVATIONEN.

AF

H. PLEIJEL.

Vi formulera vårt problem på följande sätt:

En dubbelledning af längden x_1 är vid sina båda ändpunkter förenad mot apparatanordningar; vid ledningens början appliceras vid tiden $t = 0$ en elektromotorisk kraft $E(t)$. Bestäm det variabla spänings och strömtillståndet hos ledningen. $E(t)$ pålägga vi villkoret att vara ändlig för ändliga t-värden; däremot kan $E(t)$ vara diskontinuerlig för en del t-värden. Vid tiden $t = 0$ antages såväl spänning som ström vara noll i ledningens alla punkter.

Ledningens konstanter per kilometer dubbelledning beteckna vi på vanligt sätt med r, l, a och c, spänningsskillnaden mellan de båda branscherna i en punkt med v och strömstyrkan hos ena branschen med i; v och i skola således vara funktioner af t och x.

Vidare införa vi följande förkortningar:

$$\frac{\partial}{\partial t} = p$$

$$\int_0^t dt = s$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l} + \frac{a}{c}\right) = k$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l} - \frac{a}{c}\right) = h$$

$$\sqrt{cl} \cdot x = y$$

$$\sqrt{\frac{l}{c}} = \nu$$

Mellan v och i hafva vi då ekvationssystemet:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial y} = (p + k + h)\, \nu i \\ -\nu \dfrac{\partial i}{\partial y} = (p + k - h)\, v \end{cases}$$

Gränsvillkoren vid $x = 0$ och $x = x_1$ antaga vi, för att fixera, vara af följande form:

För $x = 0$:

$$(2) \qquad pE(t) - p \cdot v = \left(Rp + Lp^2 + \frac{1}{C}\right) i.$$

För $x = x_1$:

$$(3) \qquad pv = \left(R'p + L'p^2 + \frac{1}{C'}\right) i.$$

Dessa villkor innebära, att vi antaga apparaterna vid ledningens ändpunkter bestå af ett motstånd med självinduktion seriekoppladt med en kondensator. Vid $x = 0$ skulle motståndet vara R, självinduktionen L och kondensatorns kapacitet C. Andra anordningar kunna tänkas t. ex, en transformator vid ena ändpunkten; ekvationerna blifva emellertid principiellt af samma beskaffenhet och problemets behandling ändras ej.

Genom att mellan de båda ekvationerna (1) eliminera i eller v finna vi, att båda satisfiera en partiell differentialekvation af formen

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = [(p + k)^2 - h^2]\, i.$$

Betrakta vi p såsom en operator, och integreras differentialekvationen, få vi tvänne lösningar nämligen:

$$(5) \qquad e^{-\sqrt{(p+k)^2 - h^2} \cdot y} A(t)$$

och

$$(6) \qquad e^{+\sqrt{(p+k)^2 - h^2} \cdot y} B(t)$$

där $A(t)$ och $B(t)$ äro arbiträra funktioner af (t).

Vi betrakta först lösningen (5). För korthetens skull införa vi beteckningarne

$$\gamma = \sqrt{(p + k)^2 - h^2}$$
$$\delta = p + k - \sqrt{(p + k)^2 - h^2}.$$

Lösningen (5) kan då skrifvas:

$$e^{-ky} \cdot e^{-py} \cdot e^{\mathfrak{d}y} A(t). \tag{7}$$

Vi tänka oss $\mathfrak{d}$ utvecklad efter potenser på $\frac{1}{p}$ och sätta $\frac{1}{p} = s$, där s betyder en integration med afseende på tiden mellan en undre konstant gräns, som vi här lämpligen sätta till 0, och en öfre gräns lika med t. $e^{\mathfrak{d}y}$ kan då sättes under formen af en potensserie i s, hvilken vi för ögonblicket beteckna med $\mathfrak{P}(s)$; den konstanta termen i denna serie är 1, och för $y = 0$ blifva alla koefficienterna utom den första noll. Vi använda vidare relationen

$$e^{-py} f(t) = f(t - y),$$

hvars riktighet, för det fall att $f(t)$ har derivator af alla ordningar, inses genom utveckling af e^{-py} efter potenser på p. Lösningen (5) kan därför skrifvas:

$$e^{-ky} [\mathfrak{P}(s) A(t)]_{t=t-y}.$$

Denna lösning har nu en bestämd betydelse. Den satisfierar formelt ekvation (4). För $t = y$ öfvergår den till

$$e^{-ky} A(0).$$

För $t < y$ blir den noll, under förutsättning att vi pålägga $A(t)$ villkoret att vara noll för negativa t värden. Lösningen utgöres alltså af ett strömsystem med skarp front, hvilken fortskrider i riktningen för stigande x med den konstanta hastigheten $\frac{1}{\sqrt{cl}}$.

På samma sätt se vi, att den lösning, som erhålles ur (6), innebär ett strömsystem med bestämd front, hvilken med samma hastighet fortplantas i riktning mot $x = 0$.

Det verkliga strömsystemet bildas af dylika lösningar genom superposition. För att erhålla en lösning, som är lämplig för diskussion och beräkning vid längre ledningar, förfara vi på följande sätt:

Vid $t = 0$ erhålles ett utgående strömsystem från $x = 0$. Innan fronten hunnit till ledningens andra ända $x = x_1$ måste detta strömsystem vara detsamma, som det som erhölles, om ledningen vore oändligt lång. Vi bilda därför det första utgående strömsystemet med antagande att $x_1 = \infty$. I det ögonblick strömfronten inträffar i punkten $x = x_1$, uppstår ett reflekteradt vågsystem, som fortplantas i

motsatt riktning. Grämsvillkoren vid $x = x_1$ blifva, att summan af strömmarne, samt summan af spänningarne i de båda vågorna i denna punkt äro lika med resp. mottagningsapparatens ström och spänning, hvilka skola uppfylla villkoret (3).

På samma sätt få vi, då den första reflekterade vågen når punkten $x = 0$, ett andra utgående vågsystem. Adderas spänningarne och likaledes strömstyrkorne i punkten $x = 0$ hos den reflekterade och den andra utgående vågen, få vi en spänning och ström, som skola uppfylla villkoret (2), om vi sätta $E(t) = 0$.

Vi införa beteckningarne:

(8)
$$H = R + pL + \frac{1}{pC}$$
och

(9)
$$H' = R' + pL' + \frac{1}{pC'}.$$

Innan vi gå vidare skola vi något uppehålla oss vid operatorräkning. Följande satser kunna bevisas utan svärighet.

I. Om $\mathfrak{P}(s)$ är en potensserie i operatorn s och om denna potensserie betraktad såsom serie i s har en ändlig konvergensradie, så är

$$\mathfrak{P}(s) f(t)$$

en absolut konvergent serie för ändliga t-värden, under förutsättning, att $f(t)$ är ändlig för ändliga t-värden.

II. Under samma förutsättningar angående potensserien $\mathfrak{P}(s)$, som i I, är

$$\mathfrak{P}(s) \cdot 1$$

en hel funktion i t.

III. Under förutsättning, att $f(t)$ är ändlig för ändliga t-värden äger följaade relation rum:

$$\mathfrak{P}(s) f(t) = \mathfrak{P}(0) f(t) + \int_0^t f(t - z) \frac{\partial Y(z)}{\partial z} dz,$$

hvarest

$$Y(z) = \mathfrak{P}(s)\, 1.$$

IV. Om $\mathfrak{P}_1(s)$ och $\mathfrak{P}_2(s)$ äro tvänna potensserier i operatorn s, så är:

$$\mathfrak{P}_1(s) \cdot \mathfrak{P}_2(s) f(t) = \mathfrak{P}_2(s) \cdot \mathfrak{P}_1(s) f(t).$$

V. Om $f(t)$ är noll för negativa t-värden, kan ordningen mellan en operator e^{-py}, där y är positif, och operatorsserien $\mathfrak{P}(s)$ bytas om.

VI. Om $f(t)$ är noll för negativa t-värden, äger följande relation rum för positiva y:

$$e^{-py}\mathfrak{P}(s)f(t) = \mathfrak{P}(0)f(t-y) + \int_y^t f(t-z)\frac{\partial U(z)}{\partial z}dz,$$

hvarest

$$U(z) = e^{-py}\mathfrak{P}(z)\cdot 1.$$

VII. Om $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{p}\right)$ är en potensserie i $\frac{1}{p}$ äger följande relation rum

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{p}\right)e^{kt}f(t) = e^{kt}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+k}\right)f(t)$$

$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{p}\right)$ kan äfven innehålla positiva potenser på p.

Vi återgå nu till vårt problem.

Genom insättning af uttrycket (5) eller (7) för i uti det ursprungliga ekvationssystemet (1) finna vi följande relation mellan v och i i den utgående vågen:

(10) $$v = Z\cdot i,$$

där

(11) $$Z = \sqrt{\frac{p+k+h}{p+k-h}} = \sqrt{\frac{1+(k+h)s}{1+(k-h)\cdot s}}$$

Z kalla vi ledningens karaktäristik i det variabla tillståndet.

För en reflekterad våg d. v. s. en våg gående mot punkten $x = 0$ finner man på samma sätt relationen

(12) $$v = -Z\cdot i.$$

Villkoret (2) kan skrifvas:

$$E(t) = v + Hi$$

ur denna likhet och (10) få vi för strömstyrkan vid $x = 0$ uttrycket

(13) $$i_0 = \frac{1}{H+Z}\cdot E(t).$$

$\frac{1}{H+Z}$ är att betrakta såsom en potensserie i operatorn s.

Sättes $y = 0$ i (5) och (7) finna vi:

$$i_0 = A(t).$$

Den första utgående strömvågen kan därför symboliskt skrifvas:

(14) $$i_1 = e^{-\gamma y} \frac{1}{H+Z} E(t)$$

eller

(15) $$i_1 = e^{-ky} \cdot e^{-py} \cdot e^{\delta y} \cdot \frac{1}{H+Z} \cdot E(t).$$

Den första reflekterade vågen kan symboliskt skrifvas

$$i'_1 = e^{-\gamma(2y_1 - y)} B(t),$$

där den arbiträra funktionen $B(t)$ skall bestämmas.

Vid $y = y_1$ skola följande relationer äga rum

$$v_1 = Z i_1$$

$$v'_1 = - Z i'_1$$

Alltså $$v_1 + v'_1 = H'(i_1 + i'_1).$$

eller $$Z(i_1 - i'_1) = H'(i_1 + i'_1)$$

$$i'_1 = \frac{Z - H'}{Z + H'} \cdot i_1 = \varepsilon' \cdot i_1 \text{ [1]},$$

om vi nämligen införa beteckningen:

$$\varepsilon' = \frac{Z - H'}{Z + H'}.$$

Men för $y = y_1$ är:

$$i_1 = e^{-\gamma y_1} \frac{1}{Z+H} \cdot E(t)$$

och

$$i'_1 = e^{-\gamma y_1} B(t);$$

alltså

$$B(t) = \frac{1}{Z+H} \cdot \varepsilon' \cdot E(t).$$

För den första reflekterade strömvågen få vi således den symboliska formeln:

(16) $$i'_1 = e^{-\gamma(2y_1 - y)} \frac{1}{Z+H} \cdot \varepsilon' \cdot E(t).$$

[1] i'_1 och v'_1 beteckna ström och spänning i den reflekterade vågen.

För den andra utgående strömvågen få vi på samma sätt formeln:

(17) $$i_2 = e^{-\gamma(2y_1+y)} \frac{1}{Z+H} \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot E(t)$$

där

(18) $$\varepsilon = \frac{Z-H}{Z+H}.$$

ε och ε' kunna vi kalla reflexionskoefficienter i det variabla tillståndet; såväl ε som ε' äro potensserier i operatorn s.

Af det foregående framgår omedelbart, huru de symboliska uttrycken för de olika strömvågorna bildas.

För att bilda den verkliga strömstyrkan vid en tidpunkt t i en punkt x af ledningen hafva vi först att undersöka huru många vågsystem, som hunnit bildas under tiden t. Om t. ex.

$$t = ny_1 + y_2$$

hafva vi n eller $n + 1$ vågsystem beroende på om $y >$ eller $< y_2$. Därefter beräknas strömstryrkorna i dessa vågsystem för tiden t och punkten y. Adderas de så erhållna strömmarne erhållas den verkliga strömstyrkan. I många praktiska fall är dämpningen å ledningen så stark, att endast den första utgående och den första reflekterade strömvågen behöfva medtagas.

För att bilda den symboliska lösningen ha vi endast att beteckna γ såsom dämpningsexponent, $\frac{1}{Z+H}$ motstånd för utgående ström och ε och ε' såsom reflektionskoefficienter.

Vi skola nu visa, huru öfvergången från symbolisk form till en form, som är lämplig för kalkyl, sker.

För att fixera problemet välja vi då den n^{te} utgående strömvågen. Vi införa förkortningen:

(19) $$2(n-1)y_1 + y = y_n.$$

Den symboliska formeln för i_n är:

$$e^{-\gamma y_n} \cdot \frac{1}{Z+H} \cdot (\varepsilon'\varepsilon)^{n-1} \cdot E(t).$$

Operatorn

$$\frac{1}{Z+H} (\varepsilon'\varepsilon)^{n-1}$$

kan, med undantag af ett fall, alltid skrifvas under formen:

$$\varphi_n(p)\frac{1}{Z}+\psi_n(p),$$

där φ_n och ψ_n äro rationella i p af graden noll eller af negativ grad.

Vi införa beteckningarna:

$$(20)\qquad \begin{cases} \varphi_n(p)\cdot E(t)=f_n(t) \\ \psi_n(p)\cdot E(t)=g_n(t) \\ \frac{1}{Z}\cdot f_n(t)+g_n(t)=\zeta_n(t) \end{cases}$$

$f_n(t)$ och $g_n(t)$ kunna erhållas i sluten form.

Vi kunna nämligen uppdela φ_n och ψ_n i partialbråk.

Om

$$\varphi_n(p)=\frac{a}{p-\alpha}+\frac{b}{p-\beta}+\dots$$

få vi direkt:

$$f_n(t)=ae^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha t}E(t)\,dt+be^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta t}E(t)\,dt+\dots$$

Vi kunna därför anse $f_n(t)$ och $g_n(t)$ såsom bekanta funktioner af t

Vi skrifva i_n under formen:

$$i_n=e^{-ky_n}\cdot e^{-py_n\cdot\delta y_n}\cdot\left[\frac{1}{Z}f_n(t)+g_n(t)\right].$$

Tillämpas teorem VI erhålles:

$$(21)\qquad \begin{aligned} i_n=e^{-ky_n}&\left[f_n(t-y)\sqrt{\frac{c}{l}}+g_n(t-y)\right]+ \\ &+\int_{y_n}^{t}\left[f_n(t-z)\frac{\partial U_1(z)}{\partial z}+g_n(t-z)\frac{\partial U_2(z)}{\partial z}\right]dz. \end{aligned}$$

Här är:

$$(22)\qquad \begin{cases} U_1(t)=e^{-\gamma y_n}\cdot\frac{1}{Z}\cdot 1 \\ U_2(t)=e^{-\gamma y_n}\cdot 1. \end{cases}$$

Af dessa formler framgår att U_1 och U_2 äro resp. ström och spänning i punkten y_n hos en oändligt lång ledning, då afsändningsanordningen är utan motstånd, och den anbragta elektromotoriska kraften konstant och lika med 1.

Vår närmaste uppgift är at bestämma U_1 och U_2.

Tillämpa vi teorem VII kunna vi skrifva:

$$U_1(t) = \sqrt{\frac{c}{l}}\, e^{-kt} . e^{-\sqrt{p^2-h^2}\cdot y_n} . \sqrt{\frac{p-h}{p+h}} . e^{kt} =$$

$$= \sqrt{\frac{c}{l}} . e^{-kt} . e^{-\sqrt{p^2-h^2}\cdot y_n} . (1-hs) \frac{1}{\sqrt{1-h^2s^2}} e^{kt} .$$

Om vi förlänga med $1-ks$ och med iakttagande att $(1-ks)e^{kt} = 1$, erhålles:

$$U_1(t) = \sqrt{\frac{c}{l}} . e^{-kt} . \frac{1-hs}{1-ks} . e^{-\sqrt{p^2-h^2}\cdot y_n} . \frac{1}{\sqrt{1-h^2s^2}} . 1 .$$

Utföres operationerna finner man att:

$$\frac{1}{\sqrt{1-h^2s^2}}\, 1 = I_0(iht).$$

Vidare är det lätt att bevisa att:

$$e^{-\sqrt{p^2-h^2}\, y_n} . I_0(iht) = I_0\left(ih\sqrt{t^2-y_n^2}\right).$$

Vi kunna därför skrifva:

(23) $$U_1(t) = \sqrt{\frac{c}{l}} . e^{-kt} . \frac{p-h}{p-k} . I_0\left(ih\sqrt{t^2-y_n^2}\right).$$

Vi skrifva förkortningsvis

$$I_0\left(ih\sqrt{t^2-y_n^2}\right) = I_0 .$$

Med förnyadt användande af teorem VII få vi:

$$U_1(t) = \sqrt{\frac{c}{l}} . \frac{p+k-h}{p}\, e^{-kt} I_0$$

eller

$$U_1(t) = \sqrt{\frac{c}{l}} \left[e^{-kt} I_0 + (k-h) \int_0^t e^{-kt} I_0 dt \right]$$

eller, då vi ha att sätta I_0 noll för $t < y_n$,

(24) $$U_1(t) = \sqrt{\frac{c}{l}} \left[e^{-kt} I_0 + (k-h) \int_{y_n}^t e^{-kt} I_0\, dt \right].$$

$U_1(t)$ är, såsom förut blifvit nämdt, den utgående strömvågen å en oändligt lång ledning, när afsändningsanordningen endast består af ett konstant batteri utan motstånd och med elektromotoriska kraften I. $U_2(t)$ är den motsvaranda spänningen. Genom insättning af $U_1(t)$ för i i ekvationssystem (1) erhålles:

$$U_2(t) = -\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\int_{y_n}^{t} e^{-kz} I_0 \, dz\right] \tag{25}$$

Införa vi de erhållna uttrycken för $U_1(t)$ och $U_2(t)$ i formeln för i_n, få vi slutligen:

$$\begin{aligned} i_n &= e^{-ky_n}\left[f_n(t-y_n)\sqrt{\frac{c}{l}} + g_n(t-y_n)\right] + \\ &+ \int_{y_n}^{t}\left[f_n(t-z)\, e^{-kz}\left\{\frac{\partial I_0}{\partial z} - hI_0\right\}\sqrt{\frac{c}{l}} - g_n(t-z)\, e^{-kz}\frac{\partial I_0}{\partial y}\right] dz. \end{aligned} \tag{26}$$

Vi hafva här erhållet ett uttryck för den n^{te} utgåendn strömvågen i sluten form.

För att förenkla en förberedande diskussion välja vi emellertid en annan form. Vi kunna nemligen äfven skrifva i_n under den symboliska formen:

$$i_n = e^{-\gamma y_n}\zeta_n(t),$$

där

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{Z+H}\cdot(\varepsilon'\varepsilon)^{n-1}\cdot E(t). \tag{27}$$

För $\zeta_n(t)$ kunna vi, om vi så vilja, lätt finna en sluten formel. För tillfället lämna vi emellertid denna sak åt sidan.

Med samma sätt att gå till väga, som vi nyss användt, erhålles:

$$i_n = e^{-ky_n}\zeta_n(t-y_n) - \int_{y_n}^{t}\zeta_n(t-z)\, e^{-kz}\frac{\partial I_0}{\partial y}\, dz. \tag{28}$$

För den första utgående strömvågen få vi formeln:

$$i_1 = e^{-ky}\zeta_1(t-y) - \int_{y}^{t}\zeta_1(t-z)\, e^{-kz}\frac{\partial I_0}{\partial y}\, dz \tag{29}$$

där

$$\zeta_1(t) = \frac{1}{Z+H}\cdot E(t).$$

För $y = 0$ blir $\frac{\partial I_0}{\partial y} = 0$, hvarför motsvarande strömstyrka i_{10} blir:

$$i_{10} = \zeta_1 (t).$$

$\zeta_1 (t)$ är alltså strömstyrkan vid ledningens början.

Strömstyrkan i en punkt af ledningen består af tvenna delar. Den första $e^{-ky} \zeta_1 (t - y)$ är lika med den utgående strömstyrkan förflyttad med hastigheten $\frac{1}{\sqrt{cl}}$ utefter ledningen och dämpad enligt formeln e^{-ky} eller $e^{-k\sqrt{cl} \cdot x}$. Dämpningsexponenten β är alltså:

$$\beta = \tfrac{1}{2} \sqrt{cl} \left\{ \frac{r}{l} + \frac{a}{c} \right\}$$

Denna första del är sålunda en våg, som forplantas utan »distortion«.

Den andra delen af strömstyrkan, nämligen

$$-\int_y^t \zeta_1 (t - z)\, e^{-kz} \frac{\partial I_0}{\partial y'}\, dz,$$

är noll för alla y-värden större än t; däremot finnes det ingen del af ledningen, där $y < t$, för hvilken denna strömstyrkekomponent blir noll. Uttrycket representerar alltså en strömväg med bestämd främre vågfront, där dock strömstyrkan städse är noll. Denna del af strömstyrkan innebär en »distortion« af den utgående strömvågen.

För det fall att $h = 0$, eller

$$\frac{r}{l} = \frac{a}{c}$$

blir emellertid $\frac{\partial I_0}{\partial y'} = 0$, hvarför den distortionbildande delen af strömvågen försvinnar. Detta är, som bekant, Heavisides ideella fall.

$-e^{-kz} \frac{\partial I_0}{\partial y'}$ är alltid positif. Om $\zeta_1 (t)$ är en periodisk funktion med medelvärdet noll blir därför »distortion« mindre i samma mån, som antalet perioder per sekund blir större.

Strömvågen i sin helhet har en stel främre front, som dämpas under det den fortskrider med hastigheten $\frac{1}{\sqrt{cl}}$.

Strömmens styrka i vågfronten erhålles genom att sätta $t = y$. Beteckna vi denna strömstyrka med $\bar{i}_1$ få vi:

$$\bar{i}_1 = e^{-ky}\zeta_1(0).$$

Denna ström minskas alltså exponentiellt med dämpningsexponenten

$$\beta = k\sqrt{cl} = \tfrac{1}{2}\sqrt{cl}\cdot\left\{\frac{r}{l} + \frac{a}{c}\right\}.$$

$\zeta_1(0)$ erhålles genom att i $\frac{1}{Z+H}$ sätta $s = 0$ och multiplicera med $E(0)$; Ty för $t = 0$ falla alla integraler bort.

Är därför $E(0) = 0$ blir strömstyrkan i vågfronten alltid noll. Strömstyrkans värde bestämmes således af det värde elektromotoriska kraften har, i det ögonblick den inkopplas.

Vidare är:

$$\frac{1}{Z+H} = \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{c}}\sqrt{\frac{1+(k+h)s}{1+(k-h)s}} + pL + R + \frac{s}{C}}$$

$$= s\cdot\frac{1}{L + Rs + \frac{s^2}{C} + \sqrt{\frac{l}{c}}\sqrt{\frac{1+(k+h)s}{1+(k-h)s}}\cdot s}.$$

Af detta uttryck framgår, att, om L icke är noll, blir $\frac{1}{Z+H}$ lika med noll för $s = 0$ eller med ord uttryckt: Om afsändningsanordningen har självinduktion blir strömstyrkan i vågfronten alltid noll, hvilket värde än $E(0)$ har. Samma gäller naturligtsvis om strömstyrkan vid ledningens början. Den stiger också från värdet noll.

Om elektromotoriska kraften vore impulsartad, så att dess värde vore oändligt stor, men af så kort varaktighet, att $s\cdot E(t)$ blir ändlig, få vi en stel vågfront med ändlig strömstyrka. Strömstyrkan i vågfronten blefve då tydligen:

$$e^{-ky}\cdot\frac{1}{L}\int_0^t E(t)\,dt.$$

För att undersöka huru hastigt strömstyrkan stiger i vågfronten sätta vi i uttrycket för i_1 $t = \tau + y$, där τ är en liten kvantitet.

Vi få för detta t-värde

$$i_1 = e^{-ky}\zeta_1(t) + \int_y^{\tau+y} \zeta_1(\tau + y - s)\, e^{-ky} \cdot \frac{y'}{2}\, ds =$$

$$= e^{-ky}\zeta_1(\tau) + e^{-ky} \cdot \frac{y'}{2}\zeta_1(\tau) \cdot \tau =$$

$$= e^{-ky}\zeta_1(\tau).$$

Utelämnas termer af högre ordning i τ, kunna vi skrifva

$$\zeta_1(\tau) = \frac{1}{L}\int_0^\tau E(t)\, dt = \tau \frac{E(0)}{L}.$$

Tangenten för den vinkel, som strömvågen bildar vid fronten, eller strömstyrkans ökning per sekund blir därför

$$\frac{\zeta_1(\tau) - \zeta_1(0)}{\tau} = \frac{E(0)}{L}.$$

Strömstyrkan ökas således i vågfronten på samma sätt som i en sluten krets bestående af en konstant elektromotorisk kraft $E(0)$ och ett motstånd med självinduktionskoefficienten L.

Om L är noll, antager strömstyrkan vid ledningens början ögonblickligen värdet

$$\frac{E(0)}{R + \sqrt{\frac{l}{c}}}$$

och strömstyrkan i vågfronten blir:

$$e^{-ky}\frac{E(0)}{R + \sqrt{\frac{l}{c}}}.$$

Vi skola slutligen något undersöka, huru vågfronten ändras genom reflexion vid mottagningsändan.

Vi antager då, att afsändningsanordningen är utan självinduktion, men att mottagningsanordningen har sådan. Den reflekterade strömstyrkan erhålles genom at multiplicera den inkommande med:

$$\varepsilon' = \frac{Z - H'}{Z + H'}.$$

Den reflekterade vågfronten erhålles om vi i ε' sätta $s = 0$ och multiplicera ε' med den inkommande vågfronten. Vi kunna skrifva

$$\varepsilon' = \frac{s\cdot\sqrt{\frac{l}{c}}\sqrt{\frac{1+(k+h)s}{1+(k-h)s}} - L' - R's - \frac{s^2}{C'}}{s\sqrt{\frac{l}{c}}\sqrt{\frac{1+(k+h)s}{1+(k-h)s}} + L' + R's + \frac{s^2}{C'}}$$

sättes här $s = 0$, få vi $\varepsilon' = -1$.

Den reflekterade strömvågens vågfront blir därför:

$$-e^{-k(2y_1-y)}\cdot\frac{E(0)}{R+\sqrt{\frac{l}{c}}}.$$

Den första i mottagningsanordningen ingående strömmen blir därför noll. (Den ingående strömmens styrka erhålles genom att addera strömmen i den inkommande och den reflekterade.)

En undersökning visar at strömstyrkans ökning per sekund i mottagningsanordningen blir:

$$\frac{E(0)}{R+\sqrt{\frac{l}{c}}}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{l}{c}}}{L'}.$$

Skulle återigen mottagningsanordningen vara utan självinduktion, få vi för $s = 0$:

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{\frac{l}{c}} - R'}{\sqrt{\frac{l}{c}} + R'}.$$

Den reflekterade vågens strömfront blir i dette fall:

$$e^{-k(2y_1-y)}\cdot\frac{E(0)}{R+\sqrt{\frac{l}{c}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{l}{c}} - R'}{\sqrt{\frac{l}{c}} + R'}$$

och den i mottagningsanordningen inkommande strömmen börjar med värdet

$$e^{-ky_1}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{l}{c}}}{\sqrt{\frac{l}{c}} + R'}\cdot\frac{E(0)}{\sqrt{\frac{l}{c}} + R}.$$

OM DE VÆRDIER, DEN RIEMANN'SKE FUNKTION $\zeta(\sigma + it)$ ANTAGER I HALVPLANEN $\sigma > 1$.

AF

HARALD BOHR.

Den *Riemann'ske* Zetafunktion $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$, der jo som bekendt er en i hele den komplekse Plan meromorf Funktion med den eneste Pol $s = 1$, defineres i Halvplanen $\sigma > 1$ ved den absolut konvergente Række

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Heraf udledes umiddelbart, som allerede bemærket af *Euler,* den ligeledes for $\sigma > 1$ gyldige Fremstilling

$$\zeta(s) = 1 : \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

hvor p gennemløber alle Primtallene $2, 3, 5, 7, \cdots$, eller anderledes skrevet

$$(1) \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s}),$$

hvor p_n betegner det n^{te} Primtal.

Af denne ζ-Funktionens Produktfremstilling følger umiddelbart, *at den for* $\sigma > 1$ *regulære Zetafunktion i denne Halvplan* $\sigma > 1$ *er forskellig fra* 0.

Derimod antager Zetafunktionen, som jeg nylig har bevist, i Halvplanen $\sigma > 1$ numerisk vilkaarlig smaa Værdier, d. v. s., til ethvert

selv nok saa lille $\varepsilon > 0$ svarer der et Punkt s_0 beliggende i Halvplanen $\sigma > 1$, for hvilket

$$|\zeta(s_0)| < \varepsilon.$$

Jeg skal nu i dette Foredrag bevise, eller rettere skitsere Beviset for følgende langt videregaaende Sætning: *Zetafunktionen antager i Halvplanen* $\sigma > 1$ *alle Værdier undtagen* 0, *og den antager enhver fra* 0 *forskellig Værdi endog uendelig mange Gange.*

Beviset for denne Sætning falder naturligt i tre ret adskilte Dele, at hvilke jeg nu skal gaa over til at skitsere den første.

Idet

$$-p_n^{-s} = e^{\pi i} \cdot p_n^{-(\sigma + ti)} = p_n^{-\sigma} \cdot e^{i(\pi - t \log p_n)},$$

kan den for $\sigma > 1$ konvergente Produktfremstilling (1) skrives saaledes:

$$(2) \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma} \cdot e^{i\mu_n}),$$

hvor

$$\mu_n = \pi - t \log p_n.$$

$p_n^{-\sigma}$ er altsaa Modulen, μ_n Amplituden til $-p^{-s}$. Amplituderne $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ er her alle Funktioner af den ene uafhængige Variable t.

Jer ser nu foreløbig bort fra, at alle μ^{erne} er Funktioner af den ene Variable t, og tænker mig foreløbig μ^{erne} værende fuldkommen uafhængige af hverandre; med andre Ord, jeg betragter først det almindeligere Produkt

$$(3) \qquad F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}),$$

hvor φ^{erne} er af hinanden fuldkommen uafhængige reelle Tal, eller, hvad der øjensynlig kommer ud paa det samme, er af hinanden fuldkommen uafhængige reelle Tal, alle beliggende mellem 0 (incl.) og 2π (excl.).

Dette Produkt er altsaa en Funktion af de uendelig mange uafhængige Variable $\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ (jeg har derfor betegnet det med $F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots)$), medens Produktfremstillingen (2) for $\frac{1}{\zeta(s)}$ er en Funktion af kun de to reelle Variable σ og t.

Idet Rækken med positive Led

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma}$$

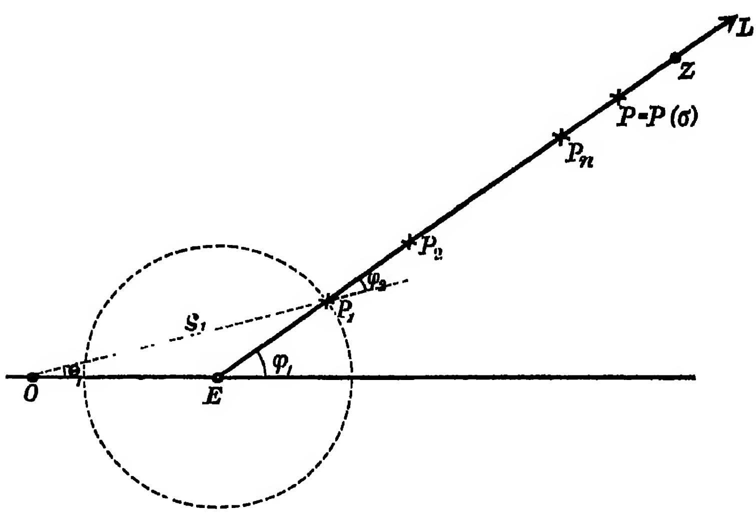
som bekendt er konvergent for $\sigma > 1$, er Produktet (3) stedse konvergent (endda absolut konvergent), naar blot $\sigma > 1$, hvilke reelle Værdier jeg end tillægger $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$, og det er umiddelbart klart, at den for $\sigma > 1$ definerede Funktion (3) stedse er forskellig fra 0.

Jeg vil nu først bevise, at denne almindeligere Funktion $F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots)$ antager enhver fra 0 forskellig Værdi, d. v. s., jeg vil bevise følgende

Hjælpesætning. *Lad $z \neq 0$ være givet; der existerer da et Tal $\sigma > 1$ og en reel Talfølge $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ saaledes, at*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}) = z.$$

Bevis. For Simpelheds Skyld vil jeg her antage, at z ikke er reel. (Tilfældet z reel kræver en særlig, iøvrigt ikke vanskelig Undersøgelse). Lad i den komplekse Plan (se Figuren) Punktet O være



Nulpunktet, Punktet E svare til Tallet 1, og Punktet Z svare til det givne komplexe Tal z. Jeg trækker da Halvlinien L fra Punktet E

gennem Punktet Z og definerer, for $\sigma > 1$, en til denne Halvlinie hørende Funktion $f(\sigma)$ gennem Ligningen

$$f(\sigma) = F(\sigma, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}),$$

hvor de i Produktet indgaaende reelle Tal $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ er afhængige af $\sigma > 1$ og paa følgende Maade bestemmes som Funktioner af σ.

Lad $\sigma > 1$ være fast. Jeg betragter da først den første Faktor

$$(1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1}).$$

Varierer φ_1 her fra 0 til 2π, gennemløber det Punkt, som i den komplekse Plan svarer til Tallet $1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1}$, øjensynlig en Cirkel med Centrum i E og Radius $p_1^{-\sigma}$. Lad P_1 være denne Cirkels Skæringspunkt med Halvlinien L. Jeg vælger da φ_1 lig Vinklen fra OE til L; efter dette Valg af φ_1 vil da det Punkt, der svarer til Tallet

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = 1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1}$$

netop være Skæringspunktet P_1. Efter at φ_1 hermed er fastlagt, betragter jeg nu Produktet af de to første Faktorer

$$(1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1})(1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}) = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1} (1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}).$$

Varierer φ_2 her fra 0 til 2π, gennemløber det Punkt, der svarer til Tallet

$$\rho_1 e^{i\theta_1} (1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}),$$

øjensynlig en Cirkel med Centrum i Punktet P_1 og Radius $\rho_1 \cdot p_2^{-\sigma}$. Lad P_2 være det paa Figuren angivne Skæringspunkt mellem denne Cirkel og Linien L (d. v. s det Skæringspunkt med størst Afstand fra Punktet E).

Jeg vælger da φ_2 lig Vinklen fra OP_1 til L. Dette Valg af φ_2 er øjensynlig truffet saaledes, at det Punkt i den komplekse Plan, der svarer til Produktet

$$(1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1})(1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2})$$

netop bliver Punktet P_2. Paa denne Maade fortsætter jeg, bestemmer, efter at φ_1 og φ_2 nu er fastlagte, φ_3 saaledes, at det Punkt P_3, der svarer til Produktet af de tre første Faktorer

$$(1+p_1^{-\sigma}e^{i\varphi_1})(1+p_2^{-\sigma}e^{i\varphi_2})(1+p_3^{-\sigma}e^{i\varphi_3})$$

ligeledes falder paa Linien L, o. s. f. Paa denne Maade bestemmes successivt alle Tallene $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$, og jeg sætter da, som ovenfor sagt, $f(\sigma)$ lig det uendelige Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma}e^{i\varphi_n}),$$

hvor $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ er bestemt paa den ovenfor omtalte Maade. Dette Produkt er, paa Grund af $\sigma>1$, konvergent; følgelig nærmer det Punkt P_n, der svarer til Produktet af de n første Faktorer, sig, naar n vokser i det uendelige, til et bestemt Grændsepunkt P, nemlig til det Punkt P, der i den komplekse Plan svarer til det gennem det uendelige Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma}e^{i\varphi_n})$$

bestemte Tal $f(\sigma)$. Da, for alle $n=1, 2, 3 \cdots$, P_n ligger paa Linien L, maa Grændsepunktet P ogsaa falde paa Linien L.

Hermed er Produktet $f(\sigma)$ og dermed det tilsvarende Punkt i den komplekse Plan $P=P(\sigma)$ bestemt for alle $\sigma>1$.

Varierer nu σ fra $+\infty$ til 1, bevæger Punktet P sig paa Halvlinien L, og man kan let vise, at Punktet P under denne Variation af σ kontinuert gennemløber hele Halvlinien L bevægende sig fra Punktet E ud i det uendelig fjerne. Følgelig maa for en vis Værdi af $\sigma>1$ Punktet P falde sammen med det givne Punkt Z, d. v. s. der existerer et vist Tal $\sigma>1$ saaledes, at $f(\sigma)=z$. Hermed er Hjælpesætningen bevist, d. v. s. det er bevist: *Til ethvert Tal $z\neq 0$ svarer der et reelt Tal $\sigma>1$ og en reel Talfølge $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ saaledes, at Produktet*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma}e^{i\varphi_n})=z.$$

Hermed er den første Del af Beviset fuldført.

Jeg gaar nu over til at skitsere den anden Del af Beviset, der kan betegnes som Overgang fra Produktet

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma}e^{i\varphi_n}),$$

hvor φ^{erne} er vilkaarlige reelle Tal, til Produktet

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma}e^{i\mu_n}),$$

hvor μ^{erne} alle er Funktioner af den ene reelle Variable t.

Lad $z \neq 0$ være et givet Tal; vort Maal er jo da at bevise Eksistensen af et Tal $s_0=\sigma_0+it_0$, for hvilket $\sigma_0>1$ og $\zeta(s_0)=z$.

Inden jeg gaar over til at føre Beviset herfor, vil det imidlertid være nødvendigt først at bevise følgende mindre udsigende Sætning:

Lad $z \neq 0$ være givet; der eksisterer da en saadan paa den reelle Akse vinkelret Linie $\sigma=\sigma_0$, hvor $\sigma_0>1$, at $\zeta(s)$ paa denne Linie kommer vilkaarlig nær til z, d. v. s. saaledes, at Uligheden

$$|\zeta(\sigma_0+it)-z|<\varepsilon$$

for ethvert $\varepsilon>0$ har en reel Løsning $t=t_0$.

Dette bevises saaledes:

Til det givne Tal $z \neq 0$ bestemmes, hvad der i Følge Bevisets første Del er muligt, et reelt Tal σ_0 og en reel Talfølge $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ saaledes, at

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\varphi_n})=\frac{1}{z}.$$

Jeg paastaar da, at det herved bestemte Tal σ_0 opfylder den stillede Fordring, d. v. s. at $\zeta(s)$ paa Linien $\sigma=\sigma_0$ kommer vilkaarlig nær til z, eller, som jeg her hellere vil udtrykke det, at $\frac{1}{\zeta(s)}$ paa Linien $\sigma=\sigma_0$ kommer vilkaarlig nær til $\frac{1}{z}$. Hvis jeg kunde bestemme et reelt Tal t saaledes, at, for alle $n=1, 2, \cdots$, Tallet $\mu_n=\pi-t\log p_n$ var lig med det faste Tal φ_n, vilde for dette t

$$\frac{1}{\zeta(\sigma_0+it)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n^{-\sigma_0}e^{i\mu_n})$$

være nøjagtig lig med $\frac{1}{g}$, og jeg vilde da umiddelbart være færdig. At bestemme et saadant t er imidlertid i Almindelighed øjensynlig ikke muligt, thi dette ene Tal t skulde jo tilfredsstille uendelig mange Ligninger, nemlig samtlige Ligninger

$$\pi - t \log p_n = \varphi_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Derimod kan jeg, idet jeg benytter en Sætning fra de Diophantiske Approximationers Teori og paa ret karakteristisk Maade gør Brug af, at de i ζ-Funktionens Produktfremstilling indgaaende Tal p_n netop er Primtallene, bevise, *at det til ethvert selv nok saa stort helt Tal N og ethvert selv nok saa lille Tal $\varepsilon > 0$ er muligt at bestemme et Tal t saaledes, at Uligheden*

$$|\mu_n - \varphi_n| < \varepsilon$$

er opfyldt for alle $n = 1, 2 \cdots N$; med andre Ord, jeg kan bestemme et Tal t saaledes, at, for et vilkaarligt stort Antal N, de N første Størrelser $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$ afviger vilkaarlig lidt fra de givne Tal $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N$.

Men heraf følger let, at

$$\frac{1}{\zeta(\sigma_0 + it)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n})$$

kommer vilkaarlig nær til det givne Tal $\frac{1}{g}$; thi jeg behøver blot først at bestemme N saa stor, at Restprodukterne

$$\prod_{n=N+1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}) \quad \text{og} \quad \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n})$$

ingen Rolle spiller, og dernæst at vælge t saaledes, at

$$\prod_{n=1}^{N} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n})$$

ligger vilkaarlig nær ved

$$\prod_{n=1}^{N} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}),$$

hvad jeg øjensynlig kan opnaa ved at vælge t saaledes, at, for alle $n = 1, 2 \cdots N$, μ_n afviger vilkaarlig lidt fra det givne Tal φ_n.

Følgelig kan jeg ved passende Valg af t bringe

$$\frac{1}{\zeta(\sigma_0 + it)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n})$$

vilkaarlig nær til

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n});$$

men dette sidste Produkt er jo netop lig med det givne Tal $\frac{1}{a}$. Hermed er den anden Del af Beviset ført, d. v. s. det er bevist:

Svarende til ethvert $a \neq 0$ eksisterer der et Tal $\sigma_0 > 1$ saaledes, at $\zeta(s)$ paa Linien $\sigma = \sigma_0$ kommer vilkaarlig nær til a, d. v. s. saaledes, at

$$\frac{1}{\zeta(s) - a}$$

paa Linien $\sigma = \sigma_0$ antager numerisk vilkaarlig store Værdier.

Jeg gaar nu over til den tredie og sidste Del af Beviset, nemlig til at bevise: $\zeta(s)$ *antager i Halvplanen $\sigma > 1$ enhver fra 0 forskellig Værdi a.*

For Simpelheds Skyld vil jeg her antage $a \neq 1$ (Tilfældet $a = 1$ kræver en særlig iøvrigt ikke vanskelig Behandling) Lad os antage Sætningen urigtig d. v. s. lad os antage $\zeta(s) \neq a$ for $\sigma > 1$; jeg vil vise, at denne Antagelse fører til en Modstrid. Jeg betragter Funktionen

$$g(s) = \frac{1}{\zeta(s) - a}.$$

Da i Følge vor Antagelse $\zeta(s) \neq a$ for $\sigma > 1$, er denne Funktion $g(s)$ regulær for $\sigma > 1$.

Endvidere er, for tilstrækkelig store σ, $g(s)$ begrændset (d. v. s. $|g(s)| <$ Konst.), da $\lim\limits_{\sigma=\infty} \zeta(s) = 1$ og $a \neq 1$.

Derimod eksisterer der i Følge Bevisets anden Del et Tal $\sigma_0 > 1$ saaledes, at Funktionen $g(s) = \frac{1}{\zeta(s) - a}$ ikke er begrændset paa selve Linien $\sigma = \sigma_0$; følgelig eksisterer der et Tal $\sigma_1 > 1$ (bestemt ved et *Dedekindsk* Snit), saaledes at $g(s)$ er begrændset for $\sigma > \sigma_1 + \varepsilon$, derimod ikke begrændset for $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon$.

Heraf følger imidlertid ved Hjælp af kendte Sætninger fra den nyere Funktionstheori, at Funktionen $g(s)$ for $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon$ heller ikke kan være begrændset *nedadtil*, d. v. s. *at* $g(s)$ *for* $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon$ *antager numerisk vilkaarlig smaa Værdier.* Men dette er øjensynlig ikke Tilfældet, thi, idet ε tænkes valgt saa lille, at $\sigma_1 - \varepsilon > 1$, er som bekendt $\zeta(s)$ begrændset for $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon$, d. v. s. der eksisterer en positiv Konstant K saaledes, at

$$|\zeta(s)| < K \quad \text{for} \quad \sigma > \sigma_1 - \varepsilon;$$

følgelig er for $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon$

$$|g(s)| = \left|\frac{1}{\zeta(s) - a}\right| \geqq \frac{1}{|\zeta(s)| + |a|} > \frac{1}{K + |a|},$$

d. v. s. $g(s)$ antager *ikke* numerisk vilkaarlig smaa Værdier for $\sigma > \sigma_1 - \varepsilon$.

Vi er saaledes førte til en Modstrid. Vor Antagelse $g(s) = \dfrac{1}{\zeta(s) - a}$ regulær for $\sigma > 1$, d. v. s. $\zeta(s) \neq a$ for $\sigma > 1$ maa følgelig have været urigtig, d. v. s. $\zeta(s)$ *antager i Halvplanen* $\sigma > 1$ *enhver fra* 0 *forskellig Værdi*[1]).

[1]) Angaaende de nærmere Enkeltheder ved det ovenfor skitserede Bevis ligesom angaaende Beviset for, at ζ-Funktionen i Halvplanen $\sigma > 1$ antager enhver fra 0 forskellig Værdi endog *uendelig mange Gange*, skal jeg henvise til en Afhandling: *Über das Verhalten von* $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$, som snarest vil fremkomme i »Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen«.

ETT AXIOMSYSTEM FÖR DEN EUKLIDISKA GEOMETRIEN.

AF

T. BRODÉN.

1. För ca. 20 år sedan (1890) uppställde och publicerade jag ett geometriskt axiomsystem [1]), som både genom den allmänna tendensen och genom öfverensstämmelse i vissa detaljer erbjuder beröringspunkter med senare framkomna axiomsystem, såsom det bekanta af *Hilbert* samt af *Veronese*, *Pieri*, *B. Levi* m. fl. Men min publikation blef helt naturligt föga bekant, då den placerats i en svensk pedagogisk tidskrift. Jag skulle dock tro, att den förtjänat åtminstone något större uppmärksamhet, alldenstund det däri angifna axiomsystemet, trots alla beröringspunkter med senare uppställda system, dock i förhållande till dem intager en ganska bestämd särställning.

Då jag nu ber att för kongressen få redogöra för mitt system, bör jag på förhand nämna, att jag i vissa afseenden nu ger det en annan och, som jag tror, bättre form än den ursprungliga.

Den första grundtanken i det hela är den, att söka reducera de specifikt geometriske grundbegreppen till begreppet *punkt* samt ett begrepp, som innebär den minsta möjliga ansats till ett afståndsbegrepp. Och detta senare kan knappast blifva något annat än begreppet om *likhet i afstånd från en och samma punkt*, eller som vi för korthets skull vilja säga, *omedelbar afståndslikhet*. Och med denna utgångspunkt skola vi söka uppställa ett i möjligaste måtto enkelt, naturligt och homogent system af *axiom*, hvilka dessutom hvar för sig äro i möjligaste måtto empiriskt evidenta. Om betydelsen häraf, särskildt

[1]) Om geometriens principer. Pedagogisk tidsskrift. Halmstad 1890.

hvad angår den nämnda begreppsreduktionen, skall jag efteråt göra några korta anmärkningar, men öfvergår nu direkt till redogörelse för axiomsystemet i fråga.

2. Det odefinierade begreppet, att punkterna A och B hafva samma afstånd från en tredje punkt P, tecknas symboliskt

$$AP = BP \text{ [eller } PA = PB].$$

Kan till detta begrepp omedelbart knytas något axiom? Ja, det följande, som må benämnas:

I. Fundamentalaxiom.

Axiom 1. Om $AP = BP$, $CP = BP$, så är $AP = CP$, eller i ord uttryckt: det gäller vid omedelbar afståndslikhet, att de som äro lika med ett och samma, äro sinsemellan lika.

Ett omedelbart *korollarium* häraf blir: de som äro lika med lika, äro sinsemellan lika.

3. Enligt sakens natur ligger det nu närmast till hands att söka vinna en *definition på det allmänna begreppet afståndslikhet*, $AB = CD$. En sådan skulle ju möjligen kunna formas såhär: $AB = CD$, om det existerar ett antal punkter P_1. $P_2 \dots P_n$, sådanna att

$$AB = P_1B,\ BP_1 = P_2P_1, \dots,\ P_nC = DC.$$

Ett sådant sätt att ställa saken skulle dock säkerligen medföra en betydlig komplikation. Men man kan i stället göra så, att man i första hand definierar afståndslikheten inom något lämpligt *partialsystem*, där förhållandena äro jämförelsevis enkla, och därefter uppstiger till den fullt allmängiltiga definitionen. Detta kan ske genom följande system af

II. Axiom, som möjliggöra det allmänna begreppet afståndslikhet.

Axiom 2. Orten för en punkt P, sådan att $PA = PB$ [då A och B äro två gifna punkter], utgör mer än *en* punkt.

Definition 1. Denna ort (= detta punktsystem) benämnas ett *plan* [1]).

---

[1]) Denna definition är, som bekant, af gammalt datum. Den föreslogs bl. a. redan af Leibnitz. Likaså den motsvarande för räta linien.

Axiom 3. Motsvarande mängd inom ett plan utgör mer än en punkt.

Definition 2. Denna punktmängd benämnes en *rät linie.*

Axiom 4. Det motsvarande inom en rät linie utgöres af *en enda punkt*, som är skiljd från både A och B (hvadan alltså en rät linie består af minst tre punkter).

Definition 3. Denna punkt kallas *midtpunkten* till A och B.

Anm. I och genom Ax. 3 och Def. 2 är tydligen förutsatt, att hvarje rät linie ingår som beståndsdel i åtminstone något plan.

Försökom nu definiera det allmänna begreppet afståndslikhet i fråga om punkter *på en rät linie.* Man skulle för detta ändamål nog kunna använda det ofvannämda interpolationsförfarandet i specialicerad form, nämligen så, att de interpolerade punkterna (P_1, P_2 ....) alla utom en förlades på linien (blott vid speciella lägen för A, B, C, D skulle de alla kunna tillhöra linien). Men ett sådant förfarande skulle, om också möjligt och kanske ur vissa synpunkter intressant, näppeligen vara gagneligt för enkeltheten och elegansen i hela axiomsystemet. Men man kan i stället forma definitionen så, att vid densamma endast punkter *på* linien komma i betraktande, nämligen helt enkelt på följande sätt:

Definition 4. På en rät linie är $AB = CD$, om paren A, D och B, C eller A, C och B, D hafva *samma midtpunkt.*

Härtill fogas genast:

Axiom 5. På en rät linie äro de afstånd lika, som äro lika med ett och samma.

Till detta begrepp skola vi nu söka återföra det fullt allmänna begreppet afståndslikhet. Härför erfordras tvänne nya axiom.

Axiom 6. Genom två punkter hvilka som hälst går alltid åtminstone någon rät linie (och således ochså något plan, se anm. efter axiom 4).

Axiom 7. Om P är en punkt på en rät linie, och A en punkt utanför linien, så finnes alltid åtminstone någon punkt B på linien, sådan att $BP = AP$.

Nu kan definitionen i fråga formuleras på följande sätt:

Definition 5. Två punktpar A, B och C, D vare gifna. Man förbinde en punkt i det ena paret med en punkt i det andra, t. ex. A och C genom en rät linie (ax. 6). På linien tagas sedan två punkter H och K så att $HA = BA$, $KC = DC$ (ax. 7). Om då (enl. def. 4) $HA = KC$, så är äfven $AB = CD$,

Såsom axiom måste äfven nu tillfogas:

Axiom 8. Det gäller fullt allmänt, att de afstånd, som äro lika med ett och samma, äro sinsamellan lika.

Af def. 4 och ax. 8 framgår såsom

Korollarium. Om vid gifna punktpar A, B; C, D det i def. 5 angifna förhållandet inträffar, då den förbindande linien väljas på ett af de 4 möjliga sätten och vid ett bestämdt val af punkterna H och K, så inträffar detsamma vid hvarje annat val af hjälplinien och af punkterna H, K.

---

4. Härmed är det fullständiga begreppet afståndslikhet färdigbildadt. Och därmed är i själfva verket en ganska betydlig del af axiomsystemet färdigt. De axiom, som ytterligare behöfvas, äro af mycket enkel natur och utgöra svar på vissa frågor, som nu af sig själfva framställa sig. Man kan lämpligen dela dem i grupper på följande sätt.

III. Axiom för individualisering af rät linie och plan
(utgörande en del af Hilberts »Axiome der Verknüpfung«).

Axiom 9. Genom två (olika) punkter går aldrig mer än *en* rät linie (men enl. ax. 6 alltid en).

Axiom 10. Den räta linie, som går genom två punkter i ett plan, ligger helt och hållet i planet.

Axiom 11. Genom tre punkter, som icke ligga i en rät linie, gar alltid ett men endast ett plan.

IV. Symmetriaxiom.

Under denna benämning kan man sammanfatta tvänne axiom, som i viss mening innebära en omvändning af de genom axiomen 2, 3, 4 och definitionerna 1, 2 fastställda förhållandena, och som kunna formuleras på följande sätt.

Axiom 12. Hvarje punkt M på en rät linie bestämmer en entydig symmetrisk (»involutorisk«) motsvarighet, vid hvilken motsvariga afstånd äro lika, och M är den enda själfmotsvariga punkten.

Anm. På grund af def. 4 är detta fullkomligt likbetydande med följande: om M och A äro två godtyckliga punkter på en rät linie,

så finnes det en men endast en punkt B, sådan, att M är midtpunkt till A och B.

Axiom 13. Hvarje rät linie i ett plan bestämmer en entydig involutorisk punktmotsvarighet, vid hvilken motsvariga afstånd äro lika och liniens alla punkter men inga andra äro självmotsvariga.

Anm. 1. Detta innebär följande: om i ett plan L är en godtycklig rät linie och A en godtycklig punkt utanför linien, så finnes det en och endast en punkt B i planet, sådan att $BP = AP$, om P är en godtycklig punkt på L. Men dette innebär ännu icke (åtminstone icke omedelbart), att $AC = BD$, om B i denne mening motsvarar A, och D i samma mening motsvarar C.

Anm. 2. En analog sats gäller äfven för planet och hela rymden. Men den bör ej uppställas som axiom, då den följer af våra öfriga axiom.

V. Kontinuitetsaxiom.

Vi hafva att eftersträfva ett medel att klassificera de olika punkterna i rummet, och närmast på en rät linie genom deras olika relationer til fasta punkter. *En* fast punkt är hävid icke tillräcklig: man kommer då blott till den nyssnämda symmetrien. Annorlunda om man utgår från *två* fasta punkter, och därigenom kommer i tillfälle att använda flere olika symmetrier. Låt O och P_1 vara två punkter på en rät linie. Då är enl. ax. 12 P_1 midtpunkt till O och en bestämd punkt P_2, vidare P_2 midtpunkt till P_1 och P_3 o. s. v, Den härmed angifna proceduren må korteligen kallas »successiv symmetribildning« eller, med vanligare uttryckssätt, »successivt afsättande af lika stora stycken«. Två fall äro nu tänkbara: denna procedur leder förr eller senare tillbaka till utgångspunkten O, eller icke. Vi konstatera nu det senare, d, v. s. uppställa axiomet:

Axiom 14. Vid »successiv afsättning af lika stora stycken« återkommer man aldrig till utgångspunkten (intet P_n sammanfaller med O).

Anm. Detta blir den form, hvari det s. k. *Archimediska axiomet* nu kommer att uppträda. Härvid måste anmärkas, att vi här tydligen komma i kontakt med den något omtvistade frågan om de hela talens begrepp. Axiomets ofvanstående formulering ansluter sig till den uppfattning af talbegreppet, som grunder sig på principen »från n till $n+1$«. Och jag stannar åtm. för tillfället vid denna formulering, med reservation för möjligheten att ordna saken på annat sätt[1]). —

[1]) Den formulering, som förekommer i min skrift från 1890, finner jag numera vara otillfredsställande.

Låter man emellertid punkten O betecknas med 0, punkten P_1 med 1, kommer hela det erhållna systemet $O, P_1, P_2 \cdots$ att motsvara den positiva heltalsserien, och detta på sådant sätt, att två punktpar, hvilkas motsvarande tal hafva lika differenser, också hafva lika inbördes afstånd. Genom att ersätta P_1 med dess i afs. på O symmetriska bildpunkt, erhåller man ett nytt punktsystem, motsvarande den negativa heltalsserien. Medelst axiom 4 kommer man sedan till punkter motsvarande ändliga dualbråk (där talet 2 spelar samma rol, som talet 10 ved decimalbråken), med samma öfverensstämmelse mellan afståndslikhet och likhet i taldifferens, som nyss.

De hittills uppställda axiomen jämte nedanstående axiom 16 äro tillräckliga för grundläggning af en »euklidisk« geometri. Men icke förty kvarstår en viss obestämdhet. Systemet kan vara i modern mening kontinuerligt, men behöfver icke vara det: vid gifven enhet och gifvet rätvinkligt koordinatsystem kunna punktmotsvarigheter saknas till andra tal än de nämnda dualtalen (incl. de hela talen) och vissa af kvadratrotsform. För att etablera den värkliga kontinuiteten, måste men tillfoga ännu ett axiom, som man med *Hilbert* lämpligen kan kalla »fullständighetsaxiom«. Detsamma kan formuleras på olika sätt[1]). Vi anföra icke här någon bestämd formulering, utan anteckna blott såsom

Axiom 15. Fullständighetsaxiom.

VI. Parallelaxiom.

Ännu erfordras ett axiom, motsvarande det euklidiska s. k. parallelaxiomet. Med det snäfva begreppsförråd, hvarmed vi nu försett oss, stå icke många olika formuleringar af detta axiom till buds. Vi välja den följande, som, då den direkt innehållar afståndsrelationer, snabbast leder till afståndsformlerna (1) och (2) och möjligen äfven ur andra synpunkter har sina företräden: om i ett plan två punkter A och B ligga symmetriskt til en rät linie, så bilda ötriga till samma linie hörande symmetriska par med samma inbördes afstånd som A och B två räta linier, eller korteligen (med användning af uttrycket »axial symmetri« för den i axiom 13 fastställda symmetriska motsvarigheten):

Axiom 16. Vid den axiala symmetrien i ett plan bilda ekvidistanta symmetriska par två räta linier.

---

[1]) I min skrift af 1890 finnes en dylik formulering angifven. *Hilbert* har först i andra upplagen af »Grundlagen etc.« upptagit ett dylikt axiom.

5. Det skall nu visas, at de uppställda axiomen äro tillräckliga för erhållande af den inom den euklidiska geometrien gällande afståndsformeln och därmed också tillräckliga för denna geometris grundläggning.

Vi hålla oss först i *planet*. Mot en rät linie svarar vid den axiala symmetrien tydligen en annan rät linie, som råkar den förstnämnda på symmetriaxeln, ifall linierna råkas alls. Och en rät linie, som förenar två symmetriskt hophörande punkter, motsvarar sig själf. Vi säga, att den är *vinkelrät* mot axeln. Tydligen går genom en punkt utanför axeln *en* men *endast en* mot densamma vinkelrät linie (ax. 6, 9 och 10). Detsamma gäller äfven om en punkt *på* axeln. Men detta behöfver bevisas.

Vi bevisa först, att egenskapen »vinkelrät« är reciprok, så att om en linie (B) är vinkelrät mot en annan (A) — $B \perp A$ —, äfven A är vinkelrät mot B. B har tydligen en gemensam punkt (»skärningspunkt«) med A, nämligen midtpunkten till två på B liggande, med afseende på A symmetriska punkter. Tag två godtyckliga sådana P och P', och låt midtpunkten heta O. Tag vidare på A de två punkter R och S, för hvilka $RO = SO = PO = P'O$. Punkterna P och R bestämma en axial symmetri, hvars axel, då $PO = RO$, går genom O. Likaså bestämma S och P en symmetri med axel genom O. Vid den förstnämnda symmetrien svarar P mot R, och alltså, då O är självmotsvarigt, linien B mot linien A, samt P' mot S. Vid den senare svarar S mot P, A mot B. Sammansättar man bägge, fås en afståndsbibehållande motsvarighet, vid hvilken linierna A och B äro självmotsvariga, men så att endast punkten O motsvarar sig själf, under det P svarer mot P', R mot S, och således på hvardera linien två motsvariga punkter alltid ligga symmetriskt till O. Sammansättas slutligen denna motsvarighet med den ursprungliga symmetrien, hvars axel var A, framgår tydligen en afståndsbibehållande motsvarighet, vid hvilken hvarje punkt af linien B är självmotsvarig, samt linien A sammanbinder hophörande punkter. Alltså är $A \perp B$.

Häraf följer nu lätt, att genom hvarje punkt (O) på en rät linie (A) går en mot henne vinkelrät linie. Ty symmetriaxeln (B) till två godtyckliga, med afseende på O symmetriskt belägna punkter af linien A går genom O, och A är vinkelrät mot B, alltså äfven B mot A. Men vidare kan genom O icke gå mer än en mot A vinkelrät linie. Ty funnes flere, skulle A vara vinkelrät mot dem alla, och således två till O symmetriska A-punkter motsvaras af flere symmetriaxler (emot ax. 3 och def. 2).

Härmed är möjligheten af »rätvinklige koordinater« gifven. Sedan man valt två axlar och en längdenhet, kommer mot hvarje punkt i planet att svara två reella tal x och y. Detta inses utan vidare. Att omvändt, vid förutsättning af fullständighetsaxiomet, mot hvarje talpar svarar en bestämd punkt, följer däraf, att två rätte linier, som äro vinkelräta mot hvar sin af axlarna, då alltid hafva en gemensam punkt, hvilket åter inses på följande sätt. Betraktom två räta linier, L och L', som med afseende på x-axeln utgöra en ort för ekvidistanta symmetriska punkter. Dessa linier måste råka y-axeln, emedan därpå måste finnas två till O symmetriska punkter med samma inbördes afstånd som två uppgifna punkter, hvilka som hälst. L och L' måste också vara vinkelrätta mot y axeln. Ty deras egenskap att i förhållande til x-axeln utgöra en ort för ekvidistanta symmetriska punktpar rubbas tydligen ej vid den symmetriska transformation, hvars axel är y-axeln. Och då L och L' vid denna icke kunna motsvara hvarandra eftersom de skära y-axeln i olika punkter, så måste hvardera vara självmotsvarig, d. v. s. vinkelrät mot y-axeln. Men y-axeln är en godtycklig linie, vinkelrät mot x-axeln. Alltså: om två linier med afseende på en tredje (A) utgöra ort för ekvidistanta symmetriska punkter, så äro de vinkelräta mot hvarje linie, som är vinkelrät mot A. Omvändt gäller det också, att om en linie är vinkelrät mot en annan, och denna åter mot en tredje (A), så bildar den förstnämda jämte dess i afs. på A symmetriskt motsvariga i förhållande till A en ort för ekvidistanta symmetriska punktpar. Detta visas så lätt, att vi ej utföra beviset. Och då, såsom nyss påpekades, en linie, som tillhör en dylik ort, måste råka hvarje mot symmetriaxeln vinkelrät linie, gäller det tydligen, att två räta linier, som äro vilkelräta mot hvar sin af två inbördes vinkelräta linier, hafva en gemensam punkt. Hvilket ju nu skulle bevisas.

Begreppet *parallelism* kan nu, om man så vill, definieras så, att två linier äro parallela, om de äro vinkelräta mot en och samma.

På ett så enkelt sätt, att det ej torde behöfva närmare utföras, kommer man nu till begreppet om planets »förskjutning på sig själf« längs x-axeln eller y-axeln, analytiskt represenderad genom relationen $x = x_1 + h$ resp. $y = y_1 + k$, liksom äfven begreppet flyttning af origo.

För att nu komma till »ekvationen för en rät linie«, anmärka vi först att två punkter (x_1, y_1) och $(-x_1, -y_1)$ ligga i rät linie med origo (O). Detta inses sålunda. Punkterna (x_1, y_1) och $(x_1, -y_1)$, kortel. P och P', ligga symmetriskt till x-axeln. Detta gäller därför äfven om linierna OP och OP'. De punkter, R och R', som på dessa

linier ligga symmetriskt till P resp. P', med afs. på O (så att $OR = OP = OP' = OR'$) äro därför också symmetriska til x-axeln. Men P och R' resp. P' och R motsvara hvarandra också med afseende på en viss linie genom O (annan än x-axeln) som symmetriaxel. I förhållande till samma linie bilda äfven midtpunkterna till P och P' resp. R' och R ett symmetriskt par. Men dessa midtpunkter tillhöra x-axeln. Denna är alltså vinkelrät mot den nämnda symmetriaxeln, som följaktligen sammanfaller med y-axeln. Punkterna R och R' äro således $(-x_1, -y_1)$ och $(-x_1, y_1)$. Detta är likbetydande med, att (x_1, y_1) och $(-x_1, -y_1)$ ligga i rät linie med O.

Vi kunna nu uppställa ekvationen för OP. Origo må flyttas till R. Koordinaterna för O blifva då (x_1, y_1), för P däremot $2x_1, 2y_1$. Dessa båda punkters koordinater äro alltså proportionella. Man finner genom ett enkelt resonnemang, att detsamma gäller för alla liniepunkter, hvilkas abscissor hafva formen $\pm m \cdot \frac{x_1}{2^n}$ (m, n hela tal): förhållandet mellan y och x är konstant, d. v. s. liniens ekvation är

$$y = \frac{y_1}{x_1} x,$$

åtm. om blott nämda abscissor afses. Och samma ekv. gäller i själfva värket om liniens alla punkter, ehuru vi för korthets skull utelämna det enkla beviset härför. Ekvationen för en linie, som ej går genom origo, fås genom koordinattransformation.

För att nu komma till afståndsformeln, observera vi först, att på en rät linie genom O icke blott y-värdena, utan äfven — blott på tecknet när — afstånden från O (»radii vectores«) äro proportionella mot x-värdena. Detta följer enkelt däraf, att $OP = OR$. Att härleda afståndsformeln blir samma sak, som att bestämma det konstanta förhållandet mellan radius vector (OP) och $|x_1|$ såsom funktion af x_1 och y_1. För detta ändamål behöfver man känna ekv. för en rät linie, som är vinkelrät mot en gifven linie och går genom en gifven punkt, låt oss säga den, som går genom O och är $\perp OP$. Den kan åter fås såhär. Tag först den symmetri, som öfverför OX (x-axelns positiva del) i OY (y-axelns pos. del), och använd sedan OY som symmetriaxel. Den så sammansatta transformationen (som kan benämnas den »vridning«, som öfverför OX i OY) är en afståndsbibehållande osymmetrisk transformation, som tydligtvis öfverför OP i (halfdelen af) den mot OP vinkelräta linien OQ. Ekvationen för OQ är därför tydligtvis antingen $yy_1 = x_1 x$ eller $yy_1 = -x_1 x$. Men den förstnämda ekv.

gäller för den linie, till hvilken OP öfvergår vid den axiala symmetri, som öfverför OX i OY. Denna linie kan icke sammanfalla med OQ. Alltså återstår för OQ ekv. $yy_1 = -x_1x$. Drag nu genom P linien $\perp OP$. Dess ekv. blir

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Sätt här $y = 0$, så fås abscissan för liniens skäringspunkt T med x-axeln: om vi tänka oss $x_1 > 0$, blir

$$OT = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1}.$$

Betrakta nu återigen den symmetri, som öfverför OX i OP. Vid densamma må P (på OP) motsvaras af P_1 (på OX), och T (på OX) af T_1 (på OP), hvarvid naturligtvis $OP = OP_1$, $OT = OT_1$. Linien P_1T_1 motsvarar linien PT och är alltså $\perp OX$ (eftersom $PT \perp OP$. Vi ha alltså:

$$\frac{OP}{x_1} = \frac{OT_1}{OP_1} = \frac{OT}{OP} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 \cdot OP},$$

hvarur

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Genom koordinattransformation fås den allmänna afståndsformeln:

(1) $$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$ [1]

Detta i planet. Den i rymden gällande formeln

(2) $$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

kan man sedan få fram genom en deduktion, som i väsentlig mån kan formas efter de 19 första propositionerna i Euklides' elfte bok.

I formeln (2) ligger hela den euklidiska (tredimensionala) geometrien innesluten, i den meningen, att allting *kan* därur härledas, sedan man på lämpligt sätt *definierat*, d. v. s. till afståndsförhållanden återfört de begrepp, med hvilka geometrien för öfrigt rör sig, såsom begreppen vinkel, ytinnehåll m. fl. Huru detta lämpligast bör ske, skall här icke afhandlas [2].

[1] Hela denna deduktion (som vid det muntliga kongressföredraget blott i största korthet antyddes) återfinnes i föga skiljaktig form i min uppsats från 1890.

[2] Jfr. »Om geometriens principer«, p. 20—22.

6. Det uppställda systemet är således *tillräckligt* för erhållande af den euklidiska geometrien. Ojämförligt mer komplicerad är — vid detta system, liksom alltid — den omvända frågan, om alla axiomen äro såsom sådana *nödvändiga*, d. v. s. af hvarandra oberoende. Här skall i detta afseende blott följande specialfråga beröras.

Vi hålla oss i *planet*, med bortseende från de axiom, som blott angå rymden. Finnes det något system, som uppfyller alla de plana axiomen utom 14 och 15? Och finnes det rentaf något *ändligt* system af denna beskaffenhet?

Ett sådant kan fås såhär [1]). Vi taga 9 punkter och ordna dem såsom i en determinant:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Och vi säga vidare, att afståndet mellan två punkter är $= a$, om de ligga på samma horisontal- eller vertikalrad, men $= b$, om de icke göra det. Vi säga dessutom, att tre punkter bilda en rät linie, om de *antingen* utgöra en horisontal- resp. en vertikalrad *eller* motsvara ett element i determinanten. Man får då 12 »räta linier«. Genom två punkter går alltid *en* linie. Tag en bestämd sådan. Då finnas 6 punkter, som icke ligga på linien. Dessa ordna sig i 3 par, som i ofvan angifven mening ligga symmetriskt till linien, enligt följande schema:

Rät linie	Symm. par	Rät linie	Symm. par
1 2 3	47, 58, 69	1 5 9	24, 37, 68
4 5 6	17, 28, 39	3 5 7	26, 19, 48
7 8 9	14, 25, 36	2 4 9	15, 38, 76
1 4 7	23, 56, 89	2 6 7	35, 18, 94
2 5 8	13, 46, 79	6 8 1	95, 27, 43
3 6 9	12, 45, 78	8 4 3	75, 16, 29

Hvart och ett af de 36 punktpar, som öfverhufvud kunna bildas bland de 9, förekommer här en och endast en gång: d. v. s. två punkter bestämma alltid entydigt en symmetriaxel. Vidare ser man lätt, att vid hvarje axel de tre symmetriska paren å ena sidan hafva samma inbör-

[1]) Denna sak förekom icke i min tidligare skrift.

des afstånd, å andra sidan fördela sig på två räta linier (jfr. parallelaxiomet). Äfven begreppet vinkelräthet kan definieras såsom ofvan (så blir t. ex. $249 \perp 843$).

Man skulle således här kunna tala om ett ändligt system, som vore »euklidiskt« (ax. 16 gäller), men icke »arkimediskt« (ax. 14 gäller tydl. icke). Att märka är dock härvid, att tydligen ej häller ax. 7 gäller, såvida man ej förutsätter $b = a$, hvilket symboliskt uttrycker, att alla afstånd äro lika. Men antages detta, gällar hela vårt plana axiomsystem (ehuru vissa axiom och likaså def. 4 bli såsom ax. resp. def. öfverflödiga)[1].

Fallet är i och för sig tämligen trivialt. Men dess blotta möjlighet kan föranleda följande anmärkning. Som bekant har *Hilbert* angifvit ett oändligt system, där alla hans axiom utom kontinuitetsaxiomen gälla. Och man kan äfven härvid stanna inom planet. Det kan nu frågas: satisfierar vårt niopunktsystem (med $a = b$) de Hilbert'ska plana axiomen, utom kontinuitetsaxiomen? Detta är *icke* händelsen. Ty dessa Hilbert'ska axiom ha redan till konsekvens, att en rät linie innehåller oändligt många punkter. Och ett specielt axiom, som står i direkt strid med 9-punktsystemet, återfinnes bland H.s »Axiome der Anordnung«, som röra sig om begreppet »mellan«, hvilket hos H. spelar rollen af grundbegrepp[2]: af tre punkter på en rät linie ligger alltid en bestämd mellan de båda andra. Alltså åtminstone om man stannar inom planimetrien, innehålla de Hilbert'ska axiom, som återstå, sedan kontinuitetsaxiomen frånräknats, någonting mera än våra motsvarande axiom.

7. Beträffande grundtanken att reducera de geometriske begreppen till de två: punkt och »omedelbar afståndslikhet«, hafva *Veronese* och *Pieri* haft yttranden i riktning af möjligheten häraf, men ingen af dem har, så vidt jag vet, genomfört denna tanke. Saken kan f. ö. sägas framskymta redan hos Euklides (I. 1—3).

Jämte de två specifikt geometriske begreppen förutsätter vårt system naturligtvis äfven vissa grundbegrepp af allmänt logisk eller aritmetisk natur. Det skulle kanske ur mer än en synpunkt vara af intresse att närmare tillse, hvilken olika ställning olika aritmetiska begrepp intaga till vårt system: somliga äro tydligen abstrakta grundbegrepp jämte de

---

[1] I förbigående anmärkes: om de 9 numren på lämpligt sätt fördelas på en allmän tredjegradskurvas inflexionspunkter, komma 3 punkter. »bilda en rät linie«, att värkligen ligga på en reell imaginär rät linie. Men detta är f. n. utan någon betydelse.

[2] Vid vårt sätt att ordna axiomen, kan begreppet »mellan« först så småningom inkomma: först fastställes, att midtpunkten till A och B ligger mellan A och B o. s. v.

rent geometriske, andra återigen inkomma genom förmedling af dessa och vinna därigenom sin konkreta geometriska betydelse.

Till förebyggande af möjligt missförstånd, må uttryckligen framhållas, att det icke är min mening beteckna såsom ett logiskt fel att använda flere »grundbegrepp« än nödigt: man må nyttja huru många som hälst, blott sammanhanget mellan dem fastställes genom vederbörliga axiom. Men å andra sidan kan ett axiomsystem, där axiomen, på sätt som ofvan skett blifvit så att säga »renodlade«, hafva sin särskilda betydelse med afseende på utredningen af geometriens fundament. Och denna betydelse kan tilläfventyrs vara äfven af mera allmänt mängdteoretisk eller t. o. m. kunskapsteoretisk natur. Härom skall jag dock icke här närmare yttra mig. Icke häller skall jag nu ingå på några betraktelser öfver det ofvan anförda systemets relationer till *K. Th. Vahlen's* »abstrakta geometri« (Leipzig, Teubner 1905), där förf. vill reducera de specifikt geometriske grundbegreppen till det enda begreppet punkt.

Beträffande lämpligheten af att söka tillämpa den moderna geometriska kriticismen inom det rent *pedagogiska* området, är jag för min del ganska skeptisk. Men vill man öfverhufvud något dylikt, kan måhända äfven det här gifna axiomsystemet förtjäna att i någon mån komma i betraktande.

I det hela torde det kunna sägas, att detta system är ett bland de så att säga stramaste, mest rakt på saken gående, som öfverhufvud kunna tänkas.

NOGLE KLASSER AF HARMONISKE FUNKTIONER MED TRE VARIABLE.

AF

E. SCHOU.

VED en harmonisk Funktion forstaas et Integral til Laplace's Ligning:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Denne Ligning spiller som bekendt en overordentlig stor Rolle for mange Grene af Fysiken, og den er derfor Genstand for mangfoldige Undersøgelser. De fleste af disse har det til fælles, at de Variable antages at være reelle, og at Integralerne søges saaledes bestemt, at visse Grænsebetingelser bliver opfyldt. Paa denne Maade har man faaet mange Oplysninger om Integralernes *kvantitative* Egenskaber, og man har i mange Tilfælde kunnet angive Former, under hvilke visse Integraler kan udvikles i Række.

I en mærkelig Modsætning til den store Mængde Resultater af almindelig Natur, man er naat til, staar den Omstændighed, at man i Virkeligheden kun kender et meget lille Antal *specielle* harmoniske Funktioner, kender dem i den Forstand, at man er i Stand til at angive deres analytiske Natur.

For Studiet af de harmoniske Funktioner er dette et Savn, hvilket indses, naar man erindrer den Nytte, man har haft af de simpleste analytiske Funktioner af 1 Variabel ved Udledelsen af de almindelige Sætninger om saadanne Funktioner. Ved Funktioner som de, der her er Tale om, med tre Variable, der hver for sig skal kunne variere i den komplekse Plan, maa man vente, at de analytiske Egen-

skaber f. Eks. Singulariteternes Natur, vil vise en overvældende Mangfoldighed, og det vil derfor være saa meget mere nyttigt at kunne disponere over omfattende Klasser af specielle Funktioner, hvis analytiske Bygning man er i Stand til at angive.

Jeg har stillet mig den Opgave at finde saadanne Klasser af Funktioner, idet jeg vilde forsøge at generalisere de plane, harmoniske Funktioner. Disse tilfredsstiller Laplaces Ligning i Planen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Sættes:

$$\eta_1 = x + iy: \ \eta_2 = x - iy,$$

bliver Ligningen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = 0,$$

som giver:

$$u = f(\eta_1) + \psi(\eta_2),$$

hvor f og ψ er arbitrære Funktioner.

Man ser herved, at Laplace's Ligning i dette Tilfælde har den Egenskab, at der findes *saadanne Integraler, at enhver Funktion deraf atter er et Integral.* η_1 er et Integral, og det er, som man ser, ogsaa $f(\eta_1)$. Findes der Løsninger af denne Art til Laplace's Ligning i Rummet?

Lad η være en harmonisk Funktion og $F(\eta)$ en vilkaarlig Funktion af η. Man har da:

$$\Delta_2 (F(\eta)) = \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2\right) F''(\eta) + F'(\eta) \cdot \Delta_2 \eta.$$

Hvis nu, foruden η, tillige $F(\eta)$ skal være harmonisk, maa følgende to Ligninger være tilfredsstillet:

$$\Delta_2(\eta) = 0, \ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Ser vi paa den sidste Ligning og antager, at $u = c$ er et Integral, saa viser det sig, at Fladerne $u = c$ enten er Planer, der berører den uendelig fjærne, imaginære Cirkel — en saadan Plan kalder jeg en *Nulplan*, idet den almindelige Betegnelse Minimalplan synes mig uheldig — eller udfoldelige Flader, der indeholder den nævnte Cirkel. Saadanne udfoldelige Flader kaldes *Nulflader*. Tillige benyttes Betegnelsen *Nullinje* for en ret Linje, der skærer den uendelig fjærne Cirkel, og *Nulkurve* for en Kurve, hvis Tangenter er Nullinjer.

Man finder derpaa, at naar begge de anførte Ligninger skal være tilfredsstillet, maa Fladerne $\eta = c$ *være et System af Nulplaner.* Ligningen for et saadant System kan gives Formen:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

hvor α, β, γ er Funktioner af η, og α og β tilfredsstiller Ligningen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0.$$

Bestemmer man altsaa η som Funktion af x, y, z ved en vilkaarlig Ligning af denne Form, vil η være en harmonisk Funktion med den Egenskab, at enhver Funktion af den atter er harmonisk.

Bestemmer man ved to Ligninger af denne Form to saadanne harmoniske Funktioner η_1 og η_2, vil

$$\rho = f(\eta_1) + \psi(\eta_2),$$

hvor f og ψ er arbitrære Funktioner, være harmonisk. Herved er vi kommet til en temmelig omfattende Klasse af harmoniske Funktioner, der, mærkelig nok, ikke synes at være undersøgt i sin Almindelighed.

De to harmoniske Funktioner η_1 og η_2 ses at have den Egenskab, at der iblandt Funktionerne af dem findes uendelig mange, som atter er harmoniske. Herved ledes man til at stille den almindelige Opgave *at bestemme alle Par af harmoniske Funktioner* ρ_1 *og* ρ_2 *med den Egenskab, at der iblandt Funktionerne af dem:* $F(\rho_1, \rho_2)$ *findes uendelig mange, som atter er harmoniske.*

Denne Opgave kan løses, idet man er i Stand til at angive alle Klasser af saadanne Funktioner. For de fleste Klassers Vedkommende kan man give Udtryk for de harmoniske Funktioner; kun ved *en* Klasse er dette ikke muligt, her kan man vel give Udtryk for uendelig mange af de harmoniske Funktioner; men den almindelige Løsning afhænger af en lineær, partiel Differentialligning af anden Orden, som kun i specielle Tilfælde synes at kunne integreres fuldstændigt ved bekendte Methoder.

Lad os antage, at der foreligger to harmoniske Funktioner med den angivne Egenskab: ρ_1 og ρ_2. Ved Ligningerne $\rho_1 = c_1$, $\rho_2 = c_2$ bestemmes der en Kongruens af Kurver, og enhver Flade, hvis Ligning kan gives Formen $f(\rho_1, \rho_2) = c$, siges at høre til Kongruensen. Kongruensen skal nu altsaa være saaledes, at der iblandt de tilhørende Fladesystemer findes uendelig mange harmoniske ɔ: saadanne, hvis Ligning har Formen $F = c$, hvor F er en harmonisk Funktion.

Det viser sig nu, at der *til en saadan Kongruens tillige maa høre et eller to Systemer af Nulflader*, enten Nulplaner eller udfoldelige Nulflader.

Denne Sætning danner Grundlaget for Løsningen og tillader simple, geometriske Definitioner af Kongruenserne.

Først betragtes det Tilfælde, hvor der til Kongruensen hører *to* Systemer af Nulflader; der gives da følgende Arter.

a) *Begge Systemer er Planer.*

Lad deres Ligninger være:

$$z = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \quad \text{med } \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 1 = 0$$

og

$$z = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \quad \text{med } \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 1 = 0,$$

idet $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ er Funktioner af η_1, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ Funktioner af η_2. De harmoniske Funktioner har Formen:

$$\rho = f(\eta_1) + \psi(\eta_2).$$

Det er dette Tilfælde, vi har betragtet ovenfor.

De to Systemer af Nulflader indhyller hver sin udfoldelige Nulflade, og Kongruensens Kurver kan defineres som Nulfladernes Fællestangenter. Specielt kan de to Nulflader falde sammen til en, og Kongruenslinjerne bliver da Dobbelttangenterne til denne. Hvis saaledes Nulfladen er en Kegle, vil Kongruensen bestaa af alle rette Linjer igennem Toppunktet. Fjærner Toppunktet sig i det uendelige langs en Linje, som ikke skærer den uendelig fjærne Cirkel, vil Kongruenslinjerne alle komme til at staa vinkelret paa samme Plan, og vi kommer da tilbage til de plane, harmoniske Funktioner.

b) *Kun det ene System af Nulflader er Planer.*

Det viser sig, at Planerne maa være parallele, medens det andet System af Nulflader dannes af Kegler med Toppunkter paa en vilkaarlig Kurve.

c) *Intet af Systemerne er Planer.*

Hvis det ene System bestaar af Kegler, maa det samme være Tilfældet med det andet. Keglernes Toppunkter ligger paa en ret Linje, og Kongruenskurverne er Cirkler, hvis Centrer ligger paa denne rette Linje, og hvis Planer staar vinkelret derpaa. Til denne Klasse hører alle Potentialer, hvis Niveauflader er Omdrejningsflader. En mere

almindelig Klasse af Funktioner faas, naar man antager, at intet af de to Systemer af Nulflader bestaar af Kegler. For at faa en geometrisk Definition af de udfoldelige Nulflader, som da optræder, kan man gaa ud fra deres Rebroussementskanter, der jo er Nulkurver. Det viser sig, at disse Rebroussementskanter er Nulkurver paa visse Flader af anden Orden. Disse Flader, der er Kegler eller Cylindre af speciel Art, har den Egenskab, at de to Systemer af Nulkurver, som findes paa dem ligesom paa enhver anden Flade, kan adskilles analytisk. Rebroussementskanterne til de udfoldelige Flader, som hører til Kongruensen, vil danne det ene System, medens det andet i Almindelighed giver en anden Kongruens.

Dette Tilfælde er det sværeste at behandle; de harmoniske Funktioner tilfredsstiller en lineær, partiel Differentialligning af anden Orden med to Variable. De Flader af anden Orden, der kan blive Tale om som Bærere af Rebroussementskanterne er Omdrejningskegler, Omdrejningscylindre eller parabolske Cylindre, hvis Frembringere er Nullinjer.

Hermed er alle Tilfælde nævnt, hvor der til Kongruensen hører to Systemer af Nulflader. Tilbage staar altsaa de Tilfælde, hvor der kun findes *et* saadant System.

Først nævnes et Grænsetilfælde, hvor dette ene System kan betragtes som dannet af to sammenfaldende Systemer af Nulflader. Systemet bestaar af Nulplaner, der kan defineres som Tangentplaner til en vilkaarlig valgt udfoldelig Nulflade. Kongruenslinjerne vil være Nullinjerne i disse Planer. Til denne Klasse af Funktioner hører Newtons Potential.

Hvis der endelig virkelig kun findes *et* System af Nulflader, hørende til Kongruensen, maa det bestaa af Kegler, hvis Toppunkter ligger paa en Kurve, der kan vælges vilkaarligt.

Hermed er nævnt alle de forskellige Tilfælde, der kan forekomme. De harmoniske Funktioner, som svarer dertil, kan enten bestemmes explicit, eller ogsaa tilfredsstiller de lineære partielle Differentialligninger af anden Orden med to Variable. Funktionerne indeholder, ligesom i det plane Tilfælde af Laplace's Ligning, to arbitrære Funktioner, hver med 1 Variabel, og desuden indgaar der i visse Tilfælde arbitrære Konstanter i Kongruensens Bestemmelse.

Ud fra disse Funktioner, som i Almindelighed vil være imaginære, kan man ved Addition danne uendelig mange andre, reelle eller imaginære, harmoniske Funktioner.

OM KRAFTFELT-FÆNOMENER I KONTINUERLIGE MATERIELLE MEDIER.

AV

V. BJERKNES.

I tilslutning til almindelige betragtninger over kraftfeltfænomener gav foredragsholderen fölgende beviser for existensen av to analogier mellem hydrodynamiske og elektrostatiske kraftfelter.

1. *Almindelige forudsætninger.* Lad $\mathbf{a}$ betegne elektrisk feltintensitet (eller elektrisk kraft) og $\mathbf{A}$ elektrisk induktion (eller polarisation efter *Hertz'* terminologi), E sand elektrisk täthed, og α dielektricitetskonstant. Med kjendte vektorbetegnelser kan da de elektrostatiske feltligninger skrives[1])

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{a} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = E \tag{2}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{a} = 0. \tag{3}$$

I et felt, hvis geometriske egenskaber er beskrevet ved disse ligninger, optræder en mekanisk kraft hvis belöb pr. volumenhed er givet ved formlen

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{A} - \tfrac{1}{2} \mathbf{a}^2 \nabla \alpha. \tag{4}$$

Denne kraft, som det elektriske system I udöver, maa angribe et fremmed system II. Dette system II maa da udöve den lige store og modsatte kraft

$$\mathbf{f}' = - \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{A} + \tfrac{1}{2} \mathbf{a}^2 \nabla \alpha \tag{4'}$$

---

1) Angaaende betegnelserne se *V. Bjerknes*: Die Kraftfelder. Serie »Die Wissenschaft« Nr. 28, Braunschweig 1909.

paa det elektriske system I, for at hindre de bevægelser som ellers vilde opstaa under indvirkningen av kraften **f**.

Det ved ligningerne (1), (2), (3) og (4) eller (4′) karakteriserede elektrostatiske felt skal nu sammenlignes med bevægelsesfeltet i en ideal vædske. Denne vædskes tæthed skal være ρ, dens specifike volum $\varkappa$, altsaa

$$\varkappa = \frac{1}{\rho}. \tag{5}$$

Hastigheden av et hvilketsomhelst punkt av vædsken skal være $\mathbf{v}$, og produkt av hastighed og tæthed, eller den specifike bevægelsesmængde $\mathbf{V}$, altsaa

$$\mathbf{V} = \rho \mathbf{v}. \tag{6}$$

Trykket i vædsken skal være p, og endelig skal de to tidsderiverte, den »lokale« og den »individuelle« betegnes med $\frac{\partial}{\partial t}$ og $\frac{d}{dt}$. Den bekjendte relation mellem dem er da

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla. \tag{7}$$

Vædsken er under sin bevægelse underkastet to betingelser, betingelsen om massens bevarelse der udtrykkes ved kontinuitetsligningen, og den dynamiske betingelse der udtrykkes ved den egentlige bevægelsesligning. Kontinuitetsligningen kan vi skrive i en hvilkensomhelst av de fölgende to former

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{8}$$

eller

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{V}. \tag{9}$$

At disse to ligninger er identiske med hinanden, verificeres let ved hjælp av relationerne (5), (6), (7).

For at skrive bevægelsesligningen betegner vi med $\mathbf{f}'$ den kraft, som et fremmed system II udöver paa vædsken, der betegnes som systemet I. Med $\mathbf{f} = -\mathbf{f}'$ betegnes den lige store og modsatte kraft, som vædsken I udöver mod det fremmede system II. Eftersom vi anvender den ene eller den anden av disse kræfter, blir bevægelsesligningen at skrive

(10) $$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \mathbf{f}.$$

eller

(10') $$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f}'.$$

2. *Første hydrodynamiske analogi.* Vi skal vedtage at sammenligne

(I) $\begin{cases} \mathbf{V} \text{ (sp. bevægelsesmængde) } \ldots\ldots \text{ med } \mathbf{a} \text{ (feltintensitet)} \\ \mathbf{v} \text{ (hastighed) } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ med } \mathbf{A} \text{ (induktion).} \end{cases}$

Vi kan da forlange, at vædskens bevægelse skal foregaa i overensstemmelse med følgende ligninger

(11) $$\mathbf{v} = \varkappa \mathbf{V}$$

(12) $$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{dt}$$

(13) $$\operatorname{curl} \mathbf{V} = 0.$$

Disse ligninger vil svare fuldstændig til de elektrostatiske feltligninger (1), (2), (3), forudsat at vi, som fortsættelse av skemaet (I), yderligere vedtager at sammenligne

(I') $\begin{cases} \varkappa \text{ (sp. volum)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ med } \alpha \text{ (dielektricitetskonstant)} \\ \dfrac{1}{\varkappa} \dfrac{d\varkappa}{dt} \begin{Bmatrix} \text{udvidelse pr. tids og volumenhed} \\ \text{af det bevægede vædskeelement} \end{Bmatrix} \ldots \text{med } E \text{ (elektrisk tæthed).} \end{cases}$

At man uden modsigelse kan forlange, at vædskebevægelsen skal foregaa i overensstemmelse med ligningerne (11), (12), (13) er klart. Ligning (11) er nemlig kun en anden form av den altid opfyldte relation (6) mellem hastighed og sp. bevægelsesmængde; ligning (12) er den altid opfyldte kontinuitetsligning (8); og ligning (13) indeholder kravet om at vædskens bevægelse skal specialiseres paa en bestemt maade som altid vil kunne naaes, hvis vi indfører de til dette kravs opfyldelse nödvendige ydre kræfter. Ligning (13) indeholder med andre ord kun det krav, at et ydre system II skal udöve en vis kraft $\mathbf{f}'$ mod vædsken I, og at til gjengjæld vædsken skal udöve den lige store og modsatte kraft $\mathbf{f}$ mod systemet II. Disse kræfter maa bestemmes henholdsvis av ligningerne (10) eller (10'). Altsaa idet vi opløser m. h. p. $\mathbf{f}$ og $\mathbf{f}'$, og samtidig skriver tætheden ρ i formen $\frac{1}{\varkappa}$

(14)
$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla p$$
eller
(14′)
$$\mathbf{f}' = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p.$$

Formelt svarer nu ligningssystemet (11)—(14′) til det elektrostatiske ligningssystem (1)—(4′). Hvor stor reel lighed der vil fremkomme mellem de to systemer vil avhænge av hvilke værdier man av ligningerne (14) eller (14′) vil finde for kræfterne $\mathbf{f}$ eller $\mathbf{f}'$, naar man specialiserer disse ligninger saa at de tilpasses for den efter ligningerne (11)—(13) forlangte bevægelse.

Man ser imidlertid straks, at ligningerne (11), (12), (13) kun specialiserer et led i ligning (14) eller (14′), nemlig træghedsleddet $\frac{1}{\varkappa}\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Da endnu trykket p er fuldstændig ubestemt, kan vi faa uendelig mange værdier af $\mathbf{f}$ og $\mathbf{f}'$, som vil frembringe en bevægelse av den karakter, som er definert ved ligningerne (11), (12), (13). Vi skal kun söge én værdi av disse kræfter, nemlig den som vil fremkomme, naar vi forlanger at trykket skal ha værdien

(15)
$$p = p_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\varkappa \mathbf{V}^2,$$

hvor p_0 er en konstant, og Φ det potential ved hvis hjælp vi altid kan udtrykke den ifölge ligning (13) altid potentielle vektor $\mathbf{V}$,

(16)
$$\mathbf{V} = \nabla\Phi.$$

Til indsætning i (14) eller (14′) danner vi nu trykgradienten

(17)
$$-\nabla p = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi + \varkappa\mathbf{V}\nabla\mathbf{V} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

I förste led tilhöire indsættes efter (15) $\mathbf{V}$ istedenfor $\nabla\Phi$, og samtidig i andet led efter (13) $\mathbf{v}$ istedenfor $\varkappa\mathbf{V}$, altsaa

(18)
$$-\nabla p = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{V} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

Men dette kan efter (7) skrives

(19)
$$-\nabla p = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

Denne værdi av trykgradienten indsættes i bevægelsesligningen i en av dens to former (14) eller (14'), for eksempel i den förste. For den kraft $\mathbf{f}$ som vædsken udöver under udförelsen av den forlangte bevægelse, faar vi da

(20) $$\mathbf{f} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

Men her kan de to förste led paa höjre side sammentrækkes. Indförer vi nemlig i det förste av dem $\varkappa\mathbf{V}$ istedenfor $\mathbf{v}$, udförer differentiationen og reducerer, saa fremkommer

(21) $$\mathbf{f} = -\mathbf{V}\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

Eller med benyttelse av ligning (12)

(22) $$\mathbf{f} = -\mathbf{V}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

Den tilsvarende kraft som systemet II udöver mod vædsken blir

(22') $$\mathbf{f}' = \mathbf{V}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\nabla\varkappa.$$

Naar man fastholder den ved skemaet (I) og (I') givne korrespondance mellem hydrodynamiske og elektriske störrelser, saa svarer ligningerne for det hydrodynamiske felt (11), (12), (13), (22), (22') fuldstændig til ligningerne for det elektrostatiske (1), (2), (3), (4); (4'), kun med den forskjel, at de kræfter som optræder i de to tilfælde har modsatte fortegn. Dette er grundlaget for den af *C. A. Bjerknes* paaviste analogi mellem hydrodynamiske og elektrostatiske kraftfelter.

3. *Anden hydrodynamiske analogi.* Vi skal nu vedtage at sammenligne

(II) $\begin{cases} \mathbf{v} \text{ (hastighed)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ med } \mathbf{a} \text{ (feltintensitet)} \\ \mathbf{V} \text{ (sp. bevægelsesmængde} \ldots\ldots \text{ med } \mathbf{A} \text{ (induktion).} \end{cases}$

Samtidig skal vi forlange, at vædskens bevægelse skal foregaa i overensstemmelse med fölgende ligninger

(23) $$\mathbf{V} = \rho\mathbf{v}$$

(24) $$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

(25) $$\mathrm{curl}\,\mathbf{v} = 0.$$

Disse vil svare fuldstændig til de elektrostatiske (1), (2), (3), forudsat at vi, som fortsættelse af skemaet (II) vedtager at sammenligne

(II') ρ (tæthed) .... med α (dielektricitetskonstant)

(II') $-\frac{\partial \rho}{\partial t}\left\{\begin{array}{l}\text{massetab pr. tids- og volumenhed}\\ \text{indenfor det ubevægelige rumelement}\end{array}\right\}$ med E (elektrisk tæthed).

At man uden modsigelse kan forlange at vædskebevægelsen skal foregaa efter ligningerne (23), (24), (25) sees umiddelbart. Thi ligning (23) er den altid opfyldte relation (6) mellem sp. bevægelsesmængde og hastighed; (24) er den altid opfyldte kontinuitetsligning (9); og (25) indeholder et krav om at vædskebevægelsen skal specialiseres paa en bestemt maade, d. v. s. et krav der altid kan opfyldes, hvis jeg indförer passende ydre kræfter, der, ganske som i det foregaaende tilfælde, blir at bestemme ved bevægelsesligningen i en af dens former (10) eller (10'). Altsaa, ved oplösning m. h. p. de kræfter, som skal bestemmes

(26) $$\mathbf{f} = -\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla p$$

eller

(26') $$\mathbf{f}' = \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p.$$

Ligningssystemet (23)—(26') svarer atter formelt til det elektrostatiske ligningssystem (1)—(4'). Hvor stor lighed de vil frembyde ud over den rent geometriske overensstemmelse som indeholdes i korrespondancen mellem ligningerne (1), (2), (3) og ligningerne (24), (25), (26) vil afhænge af de værdier, som kraften $\mathbf{f}$ eller $\mathbf{f}'$ kan tildeles under de fastsatte forhold.

Problemet er atter ubestemt, idet vi atter kan disponere over trykket. Vi vil söge den værdi af kraften som fremkommer, hvis vi tildeler trykket værdien

(27) $$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2.$$

Til indsætning i en av ligningerne (26) eller (26') danner vi da trykgradienten

(28) $$-\nabla p = \rho\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}^2\nabla\rho.$$

Indsætning i (26) gir

(29) $$\mathbf{f} = -\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}^2\nabla\rho.$$

Eller naar vi anvender udviklingen (7) og reducerer

$$(30) \qquad \mathbf{f} = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \nabla \rho.$$

I förste led tilhöire bringes ρ under differentiationstegnet $\frac{\partial}{\partial t}$, og relationen (23) anvendes

$$(31) \qquad \mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \nabla \rho.$$

Eller naar ligning (24) anvendes

$$(32) \qquad \mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{V} + \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \nabla \rho.$$

For den tilsvarende kraft $\mathbf{f}'$ som systemet II maa udövc mod vædsken, faar vi altsaa

$$(32) \qquad \mathbf{f}' = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{V} - \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \nabla \rho.$$

Hvis altsaa denne ydre kraft angriber vædskepartiklerne og samtidig trykket har værdien (27), saa er vi sikker paa at vædsken vil bevæge sig i overensstemmelse med ligningerne (23), (24), (25). Denne ydre kraft $\mathbf{f}'$, og den tilsvarende kraft $\mathbf{f}$ som vædsken udöver, stemmer imidlertid ikke hvad angrebspunkter angaar overens med kræfterne i det elektriske felt. Kraften $\mathbf{f}'$ angriber nemlig ikke bare divergens- og heterogenitetssteder, men ogsaa alle steder hvor specifik bevægelsesmængde undergaar en forandring. Vi kan imidlertid nu specialisere bevægelsen yderligere, idet vi indförer den betingelse, at den specifike bevægelsesmængdes felt skal være stationært i rummet. Denne betingelse som udtrykkes ved ligningen

$$(32) \qquad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0,$$

og som ikke staar i strid med ligningerne (23)—(25) medförer da at kræfterne $\mathbf{f}$ og $\mathbf{f}'$ antar formerne

$$(33) \qquad \mathbf{f} = -\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{V} + \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \nabla \rho$$

$$(33') \qquad \mathbf{f}' = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{V} - \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \nabla \rho.$$

Naar man fastholder den ved skemaet (II) og (II') fastsatte korrespondance mellem hydrodynamiske og elektriske störrelser, saa svarer

ligningerne for det hydrodynamiske felt (23), (24), (25), (33) og (33') fuldstændig til ligningerne for det elektriske felt (1), (2), (3), (4), (4'), kun med den forskjel, at de optrædende kræfter har modsatte fortegn i det hydrodynamiske og det elektriske tilfælde. Denne analogi, som altsaa optræder ved en eiendommelig stationær bevægelsesform, har delvis været forudseet af *Euler*, og delvis udarbeidet i matematisk form af Lord *Kelvin*.

Angaaende den mere fysiske diskussion af denne og den foregaaende analogi, henvises til den ovenfor citerede bog »Die Kraftfelder«.

OM EN AF DEN DANSKA SPRÅKFORSKAREN *KARL VERNER* ANGIFVEN MODIFIKATION AF FÖRFARANDET VID HARMONISK ANALYS AF PERIODISKA KURVOR.

AF

ERNST LINDELÖF.

Det synes vid detta tillfälle icke vara utan intresse att påpeka en af den på språkvetenskapens område vidtberömde dansken *Karl Verner* angifven metod att förenkla beräkningarna vid s. k. harmonisk analys. *Verner* har i största korthet beskrifvit sitt förfaringssätt i ett bref till Professor *H. Pipping* i Helsingfors [1]). En närmare diskussion visar att detta förfaringssätt medför afsevärda fördelar och därför är väl värdt att blifva allmännare kändt [2]).

1. Om den förelagda kurvans period antages $= 2\pi$ och abskissan betecknas med x, kan kurvans ordinata $f(x)$ representeras medels en Fourier'sk serie af formen

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Vi antaga att kurvans ordinata uppmätts för ett jämnt antal n ekvidistanta argumentvärden

[1]) Detta och ett annat bref från *Verner* till *Pipping* blifva offentliggjorda i *Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Oversigter*, med indledende Bemærkninger af *Vilh. Thomsen* og *J. P. Gram*. I dessa bref redogör *Verner* ganska utförligt för sina fonetiska undersökningar och för den apparat han därvid använde.

[2]) Jag har lemnat en utförligare redogörelse för denna fråga till sammelverket *Handbuch der physiologischen Methodik, herausgegeben von R. Tigerstedt*, där densamma ingår i *J. Poirot's* artikel öfver fonetiken (s. 207—220).

$$(1) \qquad 0,\ \omega,\ 2\omega,\ \ldots,\ (n-1)\,\omega, \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{n}\right),$$

och att därvid erhållits värdena

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}.$$

Under förutsättning att mätningarna vore exakta, hafva vi då relationerna

$$y_k \doteq a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu k\omega + b_\nu \sin \nu k\omega), \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Om vi multiplicera med $\cos \nu k\omega$ resp. $\sin \nu k\omega$ och summera med afseende å k, från $k=0$ till $k = n-1$, samt i slutresultatet åt ν efterhand gifva värdena $0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$, erhålla vi, enligt kända trigonometriska formler, följande likheter:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k = a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \ldots, \\ &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k y_k = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{3n}{2}} + a_{\frac{5n}{2}} + a_{\frac{7n}{2}} + \ldots, \\ &\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos \nu k\omega = a_\nu + a_{n-\nu} + a_{n+\nu} + a_{2n-\nu} + \ldots, \\ &\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin \nu k\omega = b_\nu - b_{n-\nu} + b_{n+\nu} - b_{2n-\nu} + \ldots, \\ &\qquad \left(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2} - 1\right). \end{aligned} \right.$$

Om alla de koefficienter a, b, hvilkas indices äro större än $\frac{n}{2}$ negligeras, gifva oss dessa likheter, för beräkningen af de n första koefficienterna

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\frac{n}{2}},\ b_1,\ \ldots,\ b_{\frac{n}{2}-1},$$

de i den harmoniska analysen allmänt använda formlerna

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k, \\
a_{\frac{n}{2}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k y_k, \\
a_\nu &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos\frac{2\nu k\pi}{n}, \\
b_\nu &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin\frac{2\nu k\pi}{n}.
\end{aligned}
\right. \qquad \left(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2} - 1\right).
$$

2. Såsom af ofvanstående härledning framgår, äro värdena (3) icke noggranna om bland de koefficienter a, b, hvilkas indices äro större än $\frac{n}{2}$, finnas sådana som hafva märkbara belopp. För att minska dessa koefficienters inverkan, erbjuder sig utvägen att öka värdet af n. Man har då dels att uppmäta flere ordinator af den gifna kurvan, dels att i formlerna (3) uträkna och summera ett större antal termer. I regel representerar ordinatornas mätning ett ganska litet arbete i jämförelse med koefficienternas uträkning, och man kan därför, för ernående af ett noggrannare resultat, gerna underkasta sig mödan att göra ett större antal mätningar, blott beräkningsmetoden kan modifieras så att det praktiska räknearbetet icke väsentligt ökas.

Verner når detta mål på följande sätt. Han förskjuter den gifna kurvan parallellt med abskissaxeln, åt höger och åt venster, om ett stycke $\Delta = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{n}$, summerar de sålunda erhållna kurvornas ordinator till det fördubblade värdet af den gifna kurvans ordinata, och dividerar summan med 4. Han erhåller sålunda en kurva hvars ordinata representeras af funktionen

$$F(x) = \frac{f(x-\Delta) + 2f(x) + f(x+\Delta)}{4}.$$

Om man af den gifna kurvan $y = f(x)$ uppmätt $2n$ ekvidistanta ordinator, svarande mot argumentvärdena

$$0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \ldots,\ (2n-1)\Delta,\quad \left(\Delta = \frac{\pi}{n}\right),$$

och betecknar de erhållna värdena med

(4) $$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_{2n-1},$$

blifva de ordinator af kurvan $y = F(x)$, som svara mot argumentvärdena (1), i ordning lika med

(5) $$\begin{cases} \bar{y}_0 = \dfrac{y'_{2n-1} + 2y'_0 + y'_1}{4},\ \bar{y}_1 = \dfrac{y'_1 + 2y'_2 + y'_3}{4},\ \ldots, \\ \qquad\qquad \bar{y}_{n-1} = \dfrac{y'_{2n-3} + 2y'_{2n-2} + y'_{2n-1}}{4}, \end{cases}$$

(om $f(x)$ är strängt periodisk och således $f(-\Delta) = f((2n-1)\Delta)$). Dessa värden (5) erhållas alldeles enkelt genom bildandet af successiva medeltal.

Den Fourier'ska utvecklingen af funktionen $F(x)$ har den enkla formen

$$F(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\cos^2\frac{\nu\Delta}{2}.$$

Om vi på kurvan $y = F(x)$ tillämpa formlerna (2), samt dividera den andra af dessa med $\frac{1}{2}$ och de två sista med $\cos^2\frac{\nu\Delta}{2}$, erhållas således följande likheter:

(2') $$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\bar{y}_k = a_0 + a_{2n} + a_{4n} + a_{6n} + \cdots, \\ \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\bar{y}_k = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{3n}{2}} + a_{\frac{5n}{2}} + a_{\frac{7n}{2}} + \cdots, \\ \dfrac{1}{\cos^2\frac{\nu\Delta}{2}}\cdot\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\bar{y}_k\cos\nu k\omega = a_\nu + a_{2n-\nu} + a_{2n+\nu} + a_{4n-\nu} + a_{4n+\nu} + \cdots \\ \qquad + \operatorname{tang}^2\frac{\nu\Delta}{2}(a_{n-\nu} + a_{n+\nu} + a_{3n-\nu} + a_{3n+\nu} + \cdots), \\ \dfrac{1}{\cos^2\frac{\nu\Delta}{2}}\cdot\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\bar{y}_k\sin\nu k\omega = b_\nu - b_{2n-\nu} + b_{2n+\nu} - b_{4n-\nu} + b_{4n+\nu} - \cdots \\ \qquad - \operatorname{tang}^2\frac{\nu\Delta}{2}(b_{n-\nu} - b_{n+\nu} + b_{3n-\nu} - b_{3n+\nu} + \cdots). \end{cases}$$

Faktorn $\tang^2 \frac{\nu\Delta}{2} = \tang^2 \frac{\nu\pi}{2n}$ är för små värden ν mycket liten; för $\nu = \frac{n}{4}$ är dess värde ännu blott 0, 17 .... och växer långsamt mot 1 då ν växer mot $\frac{n}{2}$. En jämförelse mellan likheterna (2) och (2') visar således, att man väsentligen reducerar inverkan af de koefficienter a, b hvilkas indices äro större än $\frac{n}{2}$, och följaktligen för de öfriga koefficienterna, och särskildt för dem med lägre indices, erhåller väsentligt noggrannare värden, om man i stället för (3) använder följande formler (uttrycket för $a_{\frac{n}{2}}$ är identiskt med det tidigare):

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k, \\ a_{\frac{n}{2}} &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \bar{y}_k, \\ a_\nu &= \frac{1}{\cos^2\frac{\nu\pi}{2n}}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k \cos\frac{2\nu k\pi}{n}, \\ b_\nu &= \frac{1}{\cos^2\frac{\nu\pi}{2n}}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k \sin\frac{2\nu k\pi}{n}. \end{aligned}\right. \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\right),$$

8. Vi hafva i det föregående icke beaktat mätningsfelen. En noggrannare undersökning visar att äfven dessas inverkan väsentligen reduceras vid användande af formlerna (3'). Om medelfelet har samma värde ε vid mätningen af de olika ordinatorna (hvilken förutsättning visserligen endast närmelsevis kan vara uppfylld, då mätningens osäkerhet i någon mån måste ökas med kurvans stigning), finner man att medelfelet för koefficienterna

$$a_0,\ a_\nu,\ b_\nu$$

enligt formlerna (3) är lika med

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ \varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},\ \varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},$$

enligt formlerna (3') lika med

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}},\ \rho_\nu\varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},\ \dot{\rho}_\nu\varepsilon\sqrt{\frac{2}{n}},$$

där

$$\rho_\nu = \frac{\sqrt{1+\cos^2\frac{\nu\pi}{n}}}{1+\cos\frac{\nu\pi}{n}}.$$

Värdet af denna faktor ρ_ν är för $\nu < \frac{n}{4}$ mycket nära $\frac{1}{\sqrt{2}}$, och växer långsamt mot 1 då ν växer mot $\frac{n}{2}$.

4. *Verner* använde jämväl andra förfaringssätt än det ofvan beskrifna. Exempelvis bildade han ur den gifna kurvan $y = f(x)$, genom parallellförskjutning och addition, den nya kurva hvars ordinata representeras af funktionen

$$\tfrac{1}{8}\left(f(x-2\Delta)+2f(x-\Delta)+2f(x)+2f(x+\Delta)+f(x+2\Delta)\right),$$

där $\Delta = \frac{\pi}{n}$, och tillämpade på denna kurva de vanliga formlerna, utgående från dess mot argumentvärdena $0, 5\Delta, 10\Delta, \ldots$ svarande ordinator, hvilka lätt beräknas ur den gifna kurvans $2n$ uppmätta ordinator (4). Talet n antages härvid divisibelt med 5.

Det är emellertid i alla afseenden lämpligare att, i stället för denna nya metod, två gånger å rad tillämpa *Verner's* första förfaringssätt. Man har då att uppmäta $4n$ ordinator af den gifna kurvan $y = f(x)$, samt att ur denna bilda den kurva som representeras af funktionen

$$f_1(x) = \frac{f(x-\Delta')+2f(x)+f(x+\Delta')}{4} \quad \left(\Delta' = \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2n}\right),$$

samt härur den kurva hvars ordinata har till uttryck

$$F(x) = \frac{f_1(x-\Delta)+2f_1(x)+f_1(x+\Delta)}{4}.$$

Om man med $\overline{\overline{y}}_0, \overline{\overline{y}}_1, \ldots, \overline{\overline{y}}_{n-1}$ betecknar de ordinator af denna sistnämnda kurva som svara mot argumentvärdena (1), och hvilka enkelt bildas ur den gifna kurvans $4n$ uppmätta ordinator, erhåller man på denna väg följande nya formler för koefficienternas bestämmande:

$$
(3'')\quad\left\{
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\bar{y}}_k,\\
a_{\frac{n}{2}} &= \frac{2}{\cos^2\dfrac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\bar{\bar{y}}_k,\\
a_\nu &= \frac{1}{\cos^2\dfrac{\nu\pi}{2n}\cos^2\dfrac{\nu\pi}{4n}}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\bar{y}}_k\cos\frac{2\nu k\pi}{n},\\
b_\nu &= \frac{1}{\cos^2\dfrac{\nu\pi}{2n}\cos^2\dfrac{\nu\pi}{4n}}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\bar{y}}_k\sin\frac{2\nu k\pi}{n}.
\end{aligned}
\right.
\qquad \left(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2}-1\right),
$$

Här är inverkan såväl af de negligerade koefficienterna som af mätningsfelen reducerad i ännu mycket högre grad än i formlerna (3′).

LINEÄRA PARTIELLA DIFFERENTIALEKVATIONER MED MULTIPLA KARAKTERISTIKER.

AF

HENRIK BLOCK.

PARTIELLA differentialekvationer med sammanfallande karakteristiker ha hittills blifvit föga undersökta, om man bortser från ett par ekvationer inom den matematiska fysiken, bland hvilka värmeledningsekvationen är den bäst kända. Att emellertid en dylik undersökning skulle vara af ett synnerligen stort intresse, är att förutse på grund af de intressanta resultat, som studiet af värmeledningsekvationen gifvit.

I ett arbete med titeln »Caratteristiche multiple e problema di Cauchy«[1] har *Levi* undersökt, hur *Cauchy's* problem gestaltar sig för ekvationer af högre ordning med multipla karakteristiker. Den så intressanta reella teorien beröres emellertid blott föga i detta arbete. *Levi* anger nämligen en klass af ekvationer, för hvilka det *Cauchy'ska* problemet är möjligt ur reel synpunkt utan accessoriska villkor. De ekvationer, för hvilka så är förhållandet, äro emellertid ganska speciella. Från reel synpunkt är gifvetvis det fall af det största intresset, då *Cauchy's* problem icke är möjligt, ty det är uppenbarligen i detta fall, som väsentligt nya resultat behöfvas och äro att vänta. Jag har därför företagit en undersökning af ekvationer af denna typ[2]). Som i allmänhet är fallet inom den reella teorien, måste man emellertid börja med studiet af vissa enkla typer af ekvationer. Allmännare fall kunna sedan med hjälp af lämpliga variabelombyten, integralekvationer o. s. v. reduceras till dessa typer.

[1]) Annali di Matematica, 1909.

[2]) Arkiv för matematik, astronomi och fysik, band 7.

Undersökningarna gälla uteslutande lineära ekvationer med två oberoende variabler. För att undvika accessoriska svårigheter antar jag, att ekvationens alla karakteristiker sammanfalla. Genom lämpligt val af de oberoende variablerna får ekvationen då formen

$$\frac{\partial^p z}{\partial x^p} = F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}}\right),$$

där funktionen F är en lineär funktion af z och dess derivator upp till ordningen $p-1$, hvars koefficienter äro funktioner af x och y. Karakteristikerna äro nu räta linjer, parallela med x-axeln.

För att ekvationen skall höra till den af *Levi* angifna klassen, får funktionen F icke innehålla någon derivata i afseende på y. I så fall är emellertid ekvationen en ordinär differentialekvation i afseende på x, i hvilken y parametriskt ingår. Detta fall ger oss således intet nytt.

Låt oss alltså antaga, att F innehåller åtminstone en derivata i afseende på y. Ett lämpligt fall att börja undersökningarna med är, att F består af den enda termen $\frac{\partial^q z}{\partial y^q}$, $(q < p)$. Ekvationen kan alltså skrifvas

$$L(z) = \frac{\partial^p z}{\partial x^p} - \frac{\partial^q z}{\partial y^q} = 0.$$

Vid studiet af denna ekvation visar det sig, att ett undantagsfall uppstår, om p och q ha en gemensam divisor. För att undvika de härmed förknippade svårigheterna antager jag alltså slutligen, att p och q äro relativa primtal.

Den adjungerade ekvationen till $L(z) = 0$ är

$$M(u) = (-1)^p \frac{\partial^p u}{\partial x^p} - (-1)^q \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0.$$

Rörande ekvationen $L(z) = 0$ har jag härledt några resultat, som jag i korthet skall referera.

En grundlösning till ekvationen kan bildas på följande sätt. Vi lösa ekvationen i ρ

$$\rho^q = i^p, \quad i = \sqrt{-1},$$

och beteckna dess q rötter med $\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_{q-1}$. Vare

$$\rho_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa.$$

Vi bilda nu de q uttrycken

$$E_{q,\varkappa}(\xi - x, \eta - y) = \int_0^{\infty} d\mu\, e^{\alpha_\varkappa \mu^{\frac{p}{q}}(\eta - y)} \cos\left[\beta_\varkappa \mu^{\frac{p}{q}}(\eta - y) + \mu(\xi - x)\right],$$

$$\varkappa = 0, 1, \cdots q - 1.$$

Är $\alpha_\varkappa \leqq 0$, så är den oändliga integralen konvergent för $\eta > y$. Är åter $\alpha_\varkappa \geqq 0$, konvergerar integralen för $\eta < y$.

Vi bilda nu vidare summorna

$$E_q = \Sigma_\varkappa E_{q,\varkappa}, \quad E'_q = -\Sigma'_\varkappa E_{q,\varkappa},$$

hvarvid i den första summan alla $\varkappa$-värden medtagas, för hvilka $\alpha_\varkappa < 0$, och i den senare summan alla $\varkappa$, för hvilka $\alpha_\varkappa > 0$. Är något $\alpha_\varkappa = 0$, så medtaga vi motsvarande $E_{q,\varkappa}$ efter behag i den ena eller den andra af de båda summorna.

Det existerar då en entydigt bestämd funktion $E(\xi - x, \eta - y)$ af följande egenskaper:

$$E \text{ satisfierar ekvationen } M(E) = 0;$$

För $y < \eta$ är

$$\frac{\partial^{q-1} E}{\partial \eta^{q-1}} = (-1)^{q-1} \frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}} = E_q,$$

för $y > \eta$ är

$$\frac{\partial^{q-1} E}{\partial \eta^{q-1}} = (-1)^{q-1} \frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}} = E_q.$$

Införa vi beteckningarna

$$t = \frac{\xi - x}{(\eta - y)^{\frac{q}{p}}}, \quad \vartheta = \frac{\xi - x}{(y - \eta)^{\frac{q}{p}}},$$

så är för $y < \eta$

$$E(\xi - x, \eta - y) = (\eta - y)^{q-1-\frac{q}{p}} f(t),$$

och för $y > \eta$

$$E(\xi - x, \eta - y) = (y - \eta)^{q-1-\frac{q}{p}} \bar{f}(\vartheta).$$

f och $\bar{f}$ äro hela transscendenta funktioner af t och ϑ. Grundlösningen E är kontinuerlig jämte alla sina derivator i afseende på x och y, utom för $y = \eta$, då $E, \frac{\partial E}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^{q-2} E}{\partial y^{q-2}}$ äro ändliga och kontinuerliga, men $\frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}}$ är diskontinuerlig.

Beteckna vi med s en sluten kontur i xy-planet och med z en inom s regulär lösning till ekvationen $L(z) = 0$, så är

$$\begin{matrix} q\pi z(\xi,\eta) \\ 0 \end{matrix} = \int_s \left(E \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}} - \dots - (-1)^q \frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}} z \right) dx +$$

$$+ \int_s \left(E \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}} - \dots - (-1)^p \frac{\partial^{p-1} E}{\partial x^{p-1}} z \right) dy.$$

I denna formel är det öfre värdet till vänster giltigt, om punkten ξ, η befinner sig inom konturen s, och i motsatt fall det nedre. Integralerna tagas i positiv riktning längs hela konturen s.

Fallet $q = 1$ erbjuder några olikheter. I detta fall skola integralerna i ofvanstående formel blott utsträckas till en del af s. Är p delbart med 4, skola de tagas öfver den ofvanför karakteristiken $y = \eta$ belägna delen af s; är p åter delbart med 2, men ej med 4, skola integralerna tagas öfver den under linjen $y = \eta$ belägna delen af konturen. Är slutligen p udda, kunna integralerna tagas antingen öfver den ena eller öfver den andra af dessa båda delar af s.

Såsom redan framhållits, hör ekvationen $L(z) = 0$ icke till den klass, för hvilka *Cauchy's* problem är möjligt från reel synpunkt. Hvilket problem ha vi då att sätta i stället för *Cauchy's*?

Låt oss betrakta en kontur s, inneslutande ett område Γ af xy planet. I s må ingå delar af karakteristiker $y = \text{const.}$ På dessa linjer är $dy = 0$. Då konturen s genomlöpes i positiv riktning, är $dx > 0$, om karakteristiken befinner sig nedanför Γ, och < 0 i motsatt fall. Beteckna med l_0 de förra och med l_1 de senare delarna af konturen. På l_0 är således

$$dy = 0, \quad dx > 0,$$

på l_1 är

$$dy = 0, \quad dx < 0.$$

På de öfriga delarna af konturen är $dy \neq 0$. Låt oss med s_0 beteckna de delar, där

$$dy < 0,$$

och med s_1 de delar, där

$$dy > 0.$$

För korthets skull beteckna vi med (S) kvantiteterna

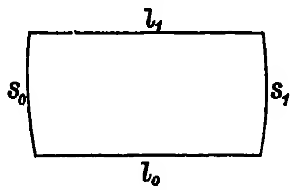
$$(S) \quad z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}, \quad \begin{matrix} m = \frac{p}{2} & \text{för } p \text{ jämnt,} \\ m = \frac{p-1}{1} & \text{för } p \text{ udda,} \end{matrix}$$

och med (L) kvantiteterna

$$(L)\quad z, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}, \qquad \begin{array}{ll} n = \frac{q}{2} & \text{för } q \text{ jämnt,} \\ n = \frac{q-1}{2} & \text{för } q \text{ udda} \end{array}$$

Vi kunna då uttala följande satser, hvarvid jag börjar med specialfallet $q = 1$.

Är $q = 1$ och p udda, så är z bestämd inom Γ och på l_1, om man känner värdet af z på l_0, kvantiteterna



(S) på s_0, s_1 och $\dfrac{\partial^{\frac{p-1}{2}} z}{\partial x^{\frac{p-1}{2}}}$ på s_0, om $\dfrac{p-1}{2}$ är udda, och på s_1, om $\dfrac{p-1}{2}$ är jämnt. I denna sats kunna vi emellertid samtidigt permutera s_0, s_1 och l_0, l_1.

Är $q = 1$ och p divisibelt med 4, så är z bestämd inom Γ och på l_0, om kvantiteterna (S) äro gifna på s_0, s_1 och z är gifvet på l_1. Är åter p divisibelt med 2, men ej med 4, så måste (S) vara gifna på s_0, s_1 och z på l_0; värdet af z inom Γ och på l_1 är däraf entydigt bestämdt.

I fallet $q = 1$ är alltså z bestämd genom kännedomen af vissa kvantiteter på en öppen kontur. I vissa fall måste konturen vara öppen uppåt, i andra nedåt. Är p udda, är det likgiltigt, om konturen är öppen uppåt eller nedåt.

För $q > 1$ ha vi att särskilja flera olika fall. Är

a) p udda och q jämnt,

så är z entydigt bestämd inom Γ, om man känner värdet af kvantiteterna (L) på l_0, l_1, (S) på s_0, s_1, samt $\dfrac{\partial^{\frac{p-1}{2}} z}{\partial x^{\frac{p-1}{2}}}$ på s_0, om $\dfrac{p-1}{2} + \dfrac{q}{2}$ är udda, och på s_1, om $\dfrac{p-1}{2} + \dfrac{q}{2}$ är jämnt.

Är åter

b) p jämnt och q udda,

så är z bestämd inom Γ, om man känner värdet af kvantiteterna (L) på l_0, l_1, (S) på s_0, s_1, och $\dfrac{\partial^{\frac{q-1}{2}} z}{\partial y^{\frac{q-1}{2}}}$ på l_0, om $\dfrac{p}{2} + \dfrac{q-1}{2}$ är udda, och på l_1, om $\dfrac{p}{2} + \dfrac{q-1}{2}$ är jämnt.

I fallet

c) p och q båda udda

har jag däremot icke lyckats härleda någon motsvarande sats. Frågan, huru integrationsproblemet i detta fall bör formuleras, är alltså tills vidare obesvarad. En formulering, analog med den i fallen a) och b), synes dock ganska sannolik.

Fallet p och q båda jämna ingår icke i ramen för våra undersökningar, då vi ju förutsätta, att p och q äro relativa primtal.

Slutligen uppstår frågan, hur man bör gå till väga för att lösa det sålunda uppställda integrationsproblemet. Den ofvan angifna grundformeln är ej tillräcklig härför, enär en del af de kvantiteter, som ingå i högra membrum, äro obekanta. I allmänhet måste integralekvationer användas för problemets lösning. Vissa enkla fall kunna dock lösas utan integralekvationers hjälp. Så är t. ex. förhållandet för $q = 1$, om vi tänka oss de båda kurvorna s_0, s_1 rycka oändligt långt bort. Lösningen är då bestämd genom de värden, den antager längs hela utsträckningen af en karakteristik. Grundformeln ger oss i detta fall direkt den sökta lösningen.

Fallet $q = 2$ kan också lösas utan integralekvationer, om s_0 och s_1 äro oändligt aflägsna. Lösningen är då bestämd mellan två karakteristiker, om dess värde är bekant längs hela utsträckningen af dessa karakteristiker. Det så formulerade problemet kan lösas med den s. k. speglingsmetoden (méthode des images).

Anmärkas må, att fallet $q = 1$ företer stora likheter med värmeledningsproblemet, under det att fallet $q > 1$ i många afseenden påminner om *Dirichlets* problem.

OM EN KLASS HELA FUNKTIONER AF IRREGULÄR TILLVÄXT.

AF

RUBEN MATTSON.

Med en hel funktion af irregulär tillväxt menas som bekant en hel funktion, hvilkens maximimodyl $M(r)$ för $|x| = r$ företer sådana oregelbundenheter, att dess värde för vissa argumentvärden är jämförligt med e^{r^α} och för andra med e^{r^β}, där α och β äro tvenne skilda konstanter eller tvenne olika hastigt växande funktioner af r. För att bilda en hel funktion af denna natur har man tvenne direkta metoder, båda angifna af *Borel*[1]). Man kan antingen bilda en beständigt konvergerande potensserie med luckor mellan termerna d. v. s. en serie af formen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^{n_\nu},$$

eller också kan man bilda en s. k. kanonisk produkt med användande af en serie nollställen, hvilkas absoluta belopp tillväxa på ett oregelbundet sätt. Den förra metoden har varit den hittills hufvudsakligen använda (*Borel*[2]), *Blumenthal*[3])). För att studera sambandet mellan en irregulär funktions storleksordning och dess serie af nollställen bör emellertid den andra metoden ligga närmare till hands. Ämnet för den undersökning, som här skall refereras, är just att gifva några enkla exempel på hela funktioner af irregulär tillväxt, hvilkas nollställen på förhand äro uppgifna.

---

[1]) Leçons sur les fonctions entières. Paris 1900. pag. 120 och 21.

[2]) Sur quelques fonctions entières. Rend. del. Circ. mat. di Palermo. T. XXIII.

[3]) Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini. Paris 1910. pag. 8.

Det följer omedelbart af den allmänna teorien för hela funktioner af ändlig ordning, hvilka villkor nollställena måste uppfylla för att funktionens tillväxt skall blifva irregulär. Skrifver man nämligen $M(r)$ under formen

$$M(r) = e^{\tau(r) r^{\rho}},$$

där ρ betecknar funktionens apparenta ordning, är tydligt, att $M(r)$ blir af irregulär tillväxt i den här afsedda meningen, endast om $\tau(r)$ i ett oändligt antal intervall antar oändligt små värden och i ett annat också oändligt antal intervall antar ändliga eller oändligt växande värden. Man får häraf omedelbart[1]) följande *nödvändiga* villkor för att funktionen $F(x)$ skall vara af irregulär tillväxt:

Om ρ *ej är ett helt tal, måste* $\lim\limits_{n=\infty} \inf \dfrac{n}{|a_n|^{\rho}}$ *vara* $= 0$*; om* ρ *är ett helt tal, måste samma villkor vara uppfylldt, men då måste man därjämte ha* $\lim\limits_{n=\infty} \inf \sum\limits_{1}^{n}{}' \dfrac{1}{a_{\nu}^{\rho}} = 0$.

Det första af båda dessa villkor är tydligen uppfylldt för funktionen

$$F_1(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(E_p \left(\frac{x}{k^{\frac{k^{\nu}}{\rho}}} \right) \right)^{k^{k^{\nu}}},$$

där E_p betyder den Weierstrassiska primfaktorn af rangen $p = [\rho]$ och k är ett helt positivt tal hv. s. h. Funktionen har nämligen följande serie af nollställen:

$$\underbrace{k^{\frac{k}{\rho}} \ldots . k^{\frac{k}{\rho}}}_{(k^k \text{ st.})}; \quad \underbrace{k^{\frac{k^2}{\rho}} \ldots . k^{\frac{k^2}{\rho}}}_{(k^{k^2} \text{ st.})}; \quad \ldots .$$

Nollställena a_m och a_{m+1} med

$$m = k^k + k^{k^2} + \ldots . + k^{k^n} \quad (n = 1, 2 \ldots .)$$

blifva alltså af storleksordningarne $m^{\frac{1}{\rho}}$ och $(m+1)^{\frac{k}{\rho}}$ resp.; $\dfrac{m+1}{|a_{m+1}|^{\rho}}$ antar alltså med växande n allt mindre värden, och vi skola nu uppvisa,

---

[1]) Jmf. *Lindelöf*: Sur les fonctions entières d'ordre entier. Annales sc. de l'École Normale, 3e sér. T. XXII. p. 375. Det erbjuder inga svårigheter att formulera de anförda villkoren så, att de äfven blifva tillräckliga.

att funktionen $F_1(x)$ är af irregulär tillväxt för $\rho > p$ och af regulär tillväxt för $\rho = p$.

För att undersöka funktionens storleksordning utgå vi från följande resultat angående funktionen $E_p(u)$:s maximimodyl på cirkeln $u = |u|$.

$$|E_p(u)|_{\max} = (|u| - 1)\, e^{|u| + \frac{|u|^2}{2} + \dots \frac{|u|^p}{p}} \qquad \text{för } |u| \geqq 1 + \frac{1}{p}$$

$$\leqq e^{\frac{p}{p+1}|u|^{p+1}} \qquad |u| < 1 + \frac{1}{p}.$$

I fallet $p < \rho < p + 1$ får man häraf utan svårighet

$$(1) \qquad |F_1(x)| \leqq e^{(1+\varepsilon(r))\left(\frac{1}{p} r^{p+\frac{\rho-p}{k^\theta}} + \frac{p}{p+1} r^{p+1-(p+1-\rho)k^{1-\theta}}\right)}$$

idet vi med $\varepsilon(r)$ beteckna[1]) en funktion tenderande mot 0 med $\frac{1}{r}$ och med θ mena ett positivt tal $\leqq 1$ bestämdt så att

$$r^\rho = k^{k^{n+\theta}}$$

om

$$(2) \qquad n = \left[\frac{\log_2(r^\rho) - \log_2 k}{\log k}\right].$$

Det följer af (1), att den mot $F_1(x)$ svarande funktionen $M_1(r)$ har sin storleksordning varierande mellan

$$e^{r^\rho} \text{ och } e^{r^{p+\frac{1}{1+k^{\frac{p+1-\rho}{\rho-p}}}}},$$

den första svarande mot $\theta = 0$ eller 1, den senare mot det θ-värde, som gör de båda termerna i exponenten i (1) lika. För $\rho = p$ medför detta tydligen icke någon variation alls i funktions storleksordning. Man får i detta fall direkt

$$M_1(r) = e^{(1+\varepsilon(r))r^p \cdot n},$$

där n är bestämdt af (2), d. v. s. för alla r-värden är $M_1(r)$ jämförligt med:

$$e^{\frac{r^p \log_2 r}{\log k}}$$

och oaktadt $F_1(x)$ har irregulärt fördelade nollställen ha alla funktionerna

---

[1]) samma betydelse har $\varepsilon(r)$ öfverallt i det följande.

$$\varphi(x) \cdot F_1(x) + \psi(x)$$

[$\varphi(x)$ och $\psi(x)$ hela funktioner af lägre ordning än p] regulär nollställesfördelning med

$$|a_n| \sim \left(\frac{n}{\log_2 n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

För att en funktion med heltalsordning skall vara irregulär fordras som nämndt, att man skall hafva

$$\liminf_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a_\nu^p} = 0.$$

Det är då tydligt, att irregulariteten kommer att bli så stor som möjligt, om man därjämte har

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{1}{a_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{1}{a_\nu^2} = \cdots \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{1}{a_\nu^p} \qquad (\mu = 1, 2, 3 \cdots),$$

där $n_1, n_2, n_3, \cdots$ utgöra en ständigt växande serie hela tal.

Alla dessa villkor äro tydligen uppfyllda för funktionen

$$F_2(x) = \prod_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k^{\frac{k^\nu}{\rho}}}\right)^{k^{k^\nu}}\right) \qquad (k^{k^{\nu_0}} > p)$$

och denna funktions irregularitet blir därför mycket större än den nyss behandlade funktionens.

Beräkningen af $M(r)$ är här synnerligen enkel, i det att man har, om $M_2(r)$ är den mot $F_2(x)$ svarande funktionen $M(r)$,

$$(4) \qquad \frac{r^m}{|a_1 a_2 \cdots a_m|} < M_2(r) < C \frac{r^m}{|a_1 a_2 \cdots a_m|},$$

där C är en viss konstant och m är bestämdt så att

$$|a_m| \leqq r < |a_{m+1}|.$$

Med samma beteckningar som för $F_1(x)$ får man alltså:

$$M_2(r) = r^{(1+\varepsilon(r))\left\{(1-k^{-0})_r \rho . k^{-0} + (1-k^{-1-0})_r \rho . k^{-0-1}\right\}}.$$

Sätter man här

$$1 - k^{-\theta} = \varkappa$$

och således

$$\theta = \frac{\log\left(\frac{1}{1-\varkappa}\right)}{\log k}$$

får man

$$M_2(r) = r^{(1+\iota(r))\left\{\varkappa r^{\rho(1-\varkappa)} + \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{\varkappa}{k}\right) r^{\frac{\rho}{k}(1-\varkappa)}\right\}}$$

hvaraf det omedelbart synes, att $M_2(r)$ har sin storleksordning växlande mellan $r^{r^{\frac{\rho}{k}}}$ och $r^{r^{\rho-\eta(r)}}$, där $\lim\limits_{r\to\infty} \eta(r) = 0$. Genom att taga k tillräckligt stort kan man alltså få $M_2(r)$ att variera mellan $e^{r^{\delta}}$ och $e^{r^{\rho}}$, hur litet än det positiva talet δ väljes.

Ännu större irregularitet fås genom att bilda funktionerna med nollställena: $k^{k^{k^{\nu}}}$ $(\nu = 1, 2, 3 \cdots)$. Man får t. ex. att funktionen

$$F_3(x) = \prod_{\nu_0}^{\infty}\left\{1 - \left(\frac{x}{\left(k^{k^{k^{\nu}}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{k^{k^{\nu}}}\right\} \qquad \left(k^{k^{\nu_0}} > \rho\right)$$

är af ordningen ρ, men dess storleksordning är i en oändlig mängd intervall

$$r^{k^{(1-\iota(r))}\left(k\log(r^{\rho})\right)^{\frac{1}{k}}}$$

d. v. s. funktionen förhåller sig i dessa intervall som en funktion af ordningen 0.

Funktionen

$$F_4(x) = \prod_{\nu=\nu_0}^{\infty}\left\{1 - \left(\frac{x}{\left(k^{k^{k^{\nu}}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{k^{k^{\nu+1}}}\right\}$$

är däremot af oändlig ordning och man har för ett oändligt antal r-värden växande mot oändligheten

$$M(r) = r^{r^{\rho}\left[\left(k\log(r^{\rho})\right)^{k^{1-\iota(r)}} - 1\right]}$$

medan

$$M(r) = r^{r^{\rho - \varepsilon(r)}}$$

för

$$r = k^{k^{k^n}} \quad n > n_0.$$

Ännu större irregularitet erhålles naturligtvis för funktioner, hvilkas nollställen äro bildade med tillhjälp af ännu flere gånger itererade exponentialfunktioner.

De funktioner, som fås på detta sätt kunna alla skrifvas under formen

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{b_\nu} \right)^{m_\nu} \right)$$

där $|b_1| < |b_2| < |b_3| \cdots$ och $\lim_{\nu=\infty} |b_\nu| = \infty$ samt där $m_1, m_2, m_3, \cdots$ äro hela tal hv. s. h. görande den anförda produkten konvergent. Af alla funktioner med samma modyler hos nollställena är tydligen tillväxten mest irregulär hos en sådan funktion och ett närmare studium af den mot densamma svarande funktionen $M(r)$ bör därför kunna lämna bidrag till lösningen af problemet att utfinna, huru en växande funktion kan vara beskaffad för att den skall kunna vara lika med maximimodylen till en hel funktion.

OM NAGRA AF RIEMANN ICKE BETRAKTADE MINIMALYTSTYCKEN, HVILKAS BEGRÄNSNING BILDAS AF TRE RÄTA LINIER.

AF

E. R. NEOVIUS.

I en afhandling »Ueber die Fläche vom kleinsten Flächeninhalt bei gegebener Begrenzung« löser *Riemann* (*Bernhard Riemann's* gesammelte Werke Leipzig 1876. Sid. 283 ff.) problemet att analytiskt bestämma en minimalyta, hvars begränsning bildas af en följd af räta linier, af hvilka två på hvarandra följande antingen skära hvarandra eller ock korsa hvarandra i rymden. I det senare fallet sträcker sig minimalytstycket i oändligheten och det antagandet göres, at dessa s. k. sektorer i oändligheten asymptotiskt närma sig en skrufyta, som bestämmes genom de två räta linierna.

Såsom en användning af den allmänna teorin löser *Riemann* problemet i det speciella fall, i hvilket begränsningen bildas af tre räta linier, som korsa hvarandra (sid 304). Äro de tre räta linierna »parallela med koordinataxlarna« (i ett rätvinkligt koordinatsystem), så uppställer *Riemann* (sid 307) i sluten form uttryckena för de rätvinkliga koordinaterna för en godtycklig punkt på ytstycket. Härvid antages att de skrufytor, till hvilka de tre sektorerna i oändligheten närma sig, hafva amplituden $\frac{\pi}{2}$ och icke en godtycklig udda multipel af $\frac{\pi}{2}$.

I uttryckena för koordinaterna x, y och z ingå två af hvarandra oberoende parametrar $p:r$ och $q:r$, af hvilkas värden minimalytstyckets form är beroende. *Riemann* ingår ej i någon diskussion af de olika former, som de genom hans formler bestämda ytorna kunna antaga. Man finner endast den korta anmärkningen, att ytans sfäriska bild,

förmedlad genom parallela normaler, kan hafva antingen en förgreningspunkt i det inre eller ock två s. k. återvändspunkter för normalerna på begränsningen.

I en uppsats »Ueber Minimalflächenstücke, deren Begrenzung von drei geradlinigen Theilen gebildet wird. Theil II. (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, 1893) stälde jag mig uppgiften at bestämma *alla* de olika former, som de genom *Riemann's* formler analytiskt bestämda minimalytstyckena kunna antaga, genom att åt parametrarna $p:r$ och $q:r$ gifvas alla reella värden från $-\infty$ till $+\infty$.

Ett specielt intresse erbjöd härvid frågan huruvida ett minimalytstycke var entydigt bestämdt genom afståndena A, B, C emellan de tre begränsande räta linierna, då afseende fästes såväl vid dessa afstånds absoluta storlek som ock vid deras förtecken. Ett afstånd emellan två begränsande linier infördes såsom positivt eller negativt allt efter som den sektor, som sträcker sig i oändligheten emellan dessa linier, har formen af en högervriden eller en venstervriden skrufyta.

För afståndena A, B, C uppställer *Riemann* (sid 306) följande uttryck:

$$\frac{1}{\pi}\cdot A = 4p^2 - (p+q+r)^2,$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot B = 4q^2 - (p+q+r)^2,$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot C = 4r^2 - (p+q+r)^2.$$

Dessa uttryck kunna sättas i formen

$$\frac{1}{\pi}\cdot A = (3p+q+r)(p-q-r) = A_2 \cdot A_1$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot B = (p+3q+r)(-p+q-r) = B_2 \cdot B_1,$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot C = (p+q+3r)(-p-q+r) = C_2 \cdot C_1.$$

Genom dessa uttryck äro afståndena A, B, C bestämda såväl till storlek som förtecken, då värdena på parametrarna p, q, r äro antagna. Uppfattas parametrarna såsom homogena koordinater för en punkt i ett plan, så synes, att afståndena A, B, C äro lika med noll för värden af parametrarna, som geometriskt representeras genom punkterna på de *sex* räta linierna $A_1 = 0$, $A_2 = 0$; $B_1 = 0$, $B_2 = 0$; $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Genom dessa sex räta linier indelas hela p, q, r-planet i 16 områden och innanför hvart och ett af dessa områden äro förtecknena för afståndena A, B, C bestämda; de förändras ej för olika värdesystem p, q, r innanför ett område. Ett ombyte af ett förtecken kan ega rum endast genom att någon af linierna A_1, A_2, ... öfverskrides.

Blir ett af afståndena A, B, C analytiskt betraktadt lika med noll derigenom att parametrarna p, q, r antaga värden, som geometriskt representeras genom en punkt på en af räta linierna A_1, B_1 eller C_1, så öfvergår den skrufformiga sektorn i en plan lamell (ett fjerdedelsplan) emellan de två hvarandra skärande räta linierna. Ifrån den sfäriska bilden, som i allmänhet sammansättes af *fem* sfäriska oktanter, afskilja sig två oktanter.

Blir ett af afstånden A, B, C lika med noll derigenom att åt parametrarna gifvas värden, som geometriskt representeras af en punkt på en af linierna A_2, B_2 eller C_2, så afskiljes deremot icke ett fjerdedelsplan ifrån minimalytstycket utan två element af detsamma, med olika tangerande plan, närma sig hvarandra, så att vid fortsatt formförändring ytstycket kommer att genomskära sig sjelf. Den sfäriska bilden af ett dylikt ytstycke bildas äfven i gränsläget, då ett af afstånden blifvit noll, af *fem* sfäriska oktanter.

Den geometriska uttrycksformen för det ofvanstående är alltså följande: blir ett af afstånden A, B eller C lika med noll, så bestämmas genom den gifna begränsningen i allmänhet två fullkomligt olika minimalytstycken.

Äro två afstånd t. ex. A och B lika med noll, så bildas ytstyckets begränsning af tre räta linier, af hvilka en skär de två öfriga under räta vinklar. Analytiskt betraktadt kunna de två afstånden A och B blifva lika med noll antingen sålunda att åt parametrarna gifvas värden, som geometriskt representeras af skärningspunkterna emellan räta linierna A_1 och B_1, A_1 och B_2, A_2 och B_1 eller ock A_2 och B_2. Man erhåller sålunda genom samma begränsning fyra olika ytstycken. Detta resultat väckte en viss uppmärksamhet bland de matematiker, som närmare sysselsatt sig med teorin för dessa ytor, ty man synes ha antagit, att genom en begränsning, som bildas af tre räta linier, af hvilka en rätvinkligt skär de två öfriga, endast ett ytstycke, nämligen ett stycke af en vanlig skrufyta, blifver bestämdt. Såväl *Riemann* som *G. Darboux* lösa direkt detta problem och komma endast till skrufytan.

Beträffande antalet ytstycken, som blifva bestämda då de tre afståndena A, B, C äro gifna såväl till storlek som förtecken, fann jag

att detta antal i allmänhet kan vara högst lika med *tre*. Äro endast absoluta storleken af afstånden gifna, så bestämmas 16, 14, 12 eller minst 10 olika ytstycken.

Under försöken att enligt den *Plateau*'ska metoden genom en lösning af tvål, vatten och glycerin experimentelt åskådliggöra de olika minimalytstyckena, stötte jag på ytstycken, hvilka icke analytiskt bestämmas genom de af *Riemann* uppstälda formlerna. Ett af dessa ytstycken uppträdde vid försöket att experimentelt framställa ett ytstycke med tre sektorer, som sträcka sig i oändligheten och där hafva karaktären af högervridna skrufytor ($A > 0$, $B > 0$, $C > 0$). Genom de undersökningar jag anstält angående formen af de ytor, som framställas genom *Riemann*'s formler, framgår det, att de ifrågavarande ytstyckena genomskära sig sjelfva och att de således ej utan vidare kunna framställas genom *Plateau*'s förfarande. Framställer man emellertid de begränsande räta linierna genom tunna järntrådar, hvilka i det ändliga förenas genom böjda trådar, och doppar man denna ställning i den *Plateau*'ska lösningen, så erhåller man, efter att hafva förstört en lamell, som bildar sig i det inre, ett ytstycke, som begränsas af de tre gifna linierna. Detta ytstycke är dubbeltsammanhängande, är en såkallad dubbelyta, som har endast en sida (»einseitige Fläche«).

Utgående ifrån denna dubbelyta, kommer man till en annan grupp af ytstycken, hvilkas begränsning äfven bildas af tre räta linier och som icke utgöra speciella fall af de ytstycken, som bestämmas genom *Riemann*'s formler, genom att låta två af de begränsande räta linierna närma sig hvarandra ända tills de skära sig i en punkt P. I detta gränsfall öfvergår det dubbeltsammanhängande ytstycket i ett enkeltsammanhängande, ifall man tänker sig sammanhanget upplöst emellan de två delarna af ytstycket, som endast hafva punkten P gemensam.

Begränsningen af ett ytstycke, hörande till denna grupp, bildas af två räta linier X och Y, som skära hvarandra under rät vinkel i en punkt P, samt en tredje rät linie Z, som står vinkelrät emot det plan, som bestämmes af de två förstnämda linierna. Betecknar man de två ifrån punkten P utgående delarna af de obegränsade linierna X och Y med X_1 och X_2, Y_1 och Y_2, samt tänker man sig dessa delar förflyttade i planet X, Y, så att sammanhanget i punkten P fullkomligt upplöses, men likväl så, att halflinierne X_1 och X_2 samt Y_1 och Y_2

förblifva parallela, och att vinklarna $X_1 Y_2$ och $Y_1 X_2$ med spetsarna P_1 och P_2 förblifva räta, så erbjuder sig det allmännare problemet att bestämma ett minimalytstycke, hvars fullständiga begränsning bildas af de fyra halflinierna X_1, X_2, Y_1, Y_2 samt en femte åt hvardera sidan obegränsad linie Z, som står vinkelrät emot de fyra halfliniernas plan. Härvid böra halflinierna X_1 och Y_1 i oändligheten förknippas med hvarandra genom ett ytstycke, som asymptotiskt närmar sig planet $X_1 Y_1$, hvaremot de i oändligheten liggande ändpunkterna af linien Z förenas med de oändligt aflägsna punkterna af halflinierna X_2 och Y_2 genom ytsektorer, som hafva karaktären af skrufytor.

Den sfäriska bilden af ett sålunda begränsadt ytstycke kan sammansättas af *sju* oktanter och på begränsningen af denna bild kunna *tre* singulära punkter uppträda.

De rätvinkliga koordinaterna x och y för en punkt på ytstycket uttryckas genom de reella delarna af elliptiska integraler af tredje arten, medan koordinaten z, som räknas parallel med linien Z, framställes såsom den reella delen af en algebraisk funktion af en komplex variabel.

I uttryckena för de rätvinkliga koordinaterna uppträda tre af hvarandra oberoende parametrar a, b, c. Genom en af dessa, t. ex. c, bestämmes förhållandet emellan afstånden från linien Z till linierna X_1 och Y_1. De två andra parametrarna kunna bestämmas så, att punkterna P_1 och P_2 sammanfalla. I detta gränsfall erhålles ett ytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier, nämligen linierna $X_1 + X_2 = X$ och $Y_1 + Y_2 = Y$, som skära sig, samt linien Z.

Betecknas koordinaterna för punkterna P_1 och P_2 med resp. $(x_1, y_1, 0)$ och $(x_2, y_2, 0)$, så framställer sig frågan för huru många värdesystem af parametrarna a och b ekvationerna $x_1 = x_2$ och $y_1 = y_2$ samtidigt satisfieras. Resultatet af en genomförd undersökning ger vid handen, att det finnes *två* värdesystem (a_1, b_1) och (a_2, b_2) som satisfiera ofvanstående två ekvationer.

Man ledes sålunda till två olika typer af ytstycken, hvilkas begränsning bildas af tre räta linier, af hvilka två skära hvarandra, medan den tredje står vinkelrät emot de två första liniernas plan. Det ena värdesystemet (a_1, b_1) leder till en begränsning af den beskaffenhet att linierna $X_1 + X_2 = X$ och $Y_1 + Y_2 = Y$ äro obegränsade i hvardera riktningen. Det andra värdesystemet (a_2, b_2) leder till en begränsning, som består af två ifrån en punkt P utgående halflinier och en tredje linie Z, som står vinkelrät emot dessa halfliniers plan. Man har att tänka sig, att före gränsöfvergången $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

halflinierna X_2 och Y_2 hvardera öfvergått i deras motsatta riktningar och att således i gränsläget $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ half-linierna x_1 och x_2 samt likaså halflinierna Y_1 och Y_2 täcka hvarandra. På den analytiska fortsättningen af detta senare ytstycke uppträda de sammanfallande halflinierna $X_1 + X_2$ och $Y_1 + Y_2$ såsom dubbellinier i den bemärkelse, att genom hvarje punkt af dessa linier — punkten P undantagen — gå två distinkta ytelement. Det kan väl antagas att *Riemann,* då han stälde problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af räta linier, icke tänkt på dylika ytstycken med dubbellinier. Men dessa ytstycken kunna ej uteslutas, emedan desamma framträda, då några i en allmännare lösning ingående parametrar variera kontinuerligt.

Utgår man ifrån det gränsläge $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, som motsvarar parametersystemet (a_1, b_1), och betraktar man räta linien Z såsom en rörlig linie, hvilken ständigt förblir vinkelrät emot planet $X_1 + X_2 = X$, $Y_1 + Y_2 = Y$, och låter man denna linie Z närma sig en af de båda halflinierna X_1 eller Y_1, t. ex. Y_1, medan afståndet från den andra halflinien X_1 bibehåller ett värde som är större än noll, så uppstår i gränsfallet, då det förstnämda afståndet är lika med noll, eller då linien Z skär halflinien Y_1 i en punkt P_3, ett minimalytstycke, som består af två skilda ytstycken, hvilka *icke* äro delar af samma analytiska yta. Det ena ytstycket är ett stycke af en skrufyta, hvars axel utgöres af den rätliniga sträckan PP_3 af halflinien Y_1 och på hvilket halflinien X_2 och den ena från punkten P_3 utgående halflinien Z_1 äro alstrande linier. Det andra ytstycket begränsas af de från punkterna P och P_3 utgående fyra halflinierna X_1, Y_2 samt Z_2, Y_3, hvilken senare utgör en del af halflinien Y_1 och således ligger i förlängningen af Y_2. Ytstyckets begränsning bildas alltså af tre räta linier, af hvilka två, X_1 och Z_2 skäras under räta vinklar af den tredje linien $Y_2 + Y_3$, som är afbruten emellan punkterna P och P_3.

Till de tidigare (sid 173) omnämda fyra ytstyckena, hvilkas begränsning äfven utgjordes af tre räta linier; af hvilka två skäras af den tredje under räta vinklar kommer således nu ett femte ytstycke, som ej framgår ur *Riemann*'s formler.

Frågan uppstår nu huruvida härmed alla ytstycken äro bestämda, hvilkas begränsning bildas af tre räta linier, af hvilka två skära den tredje rätvinkligt.

Riemann behandlar bland exemplen på minimalytor, hvilkas begränsning är föreskrifven följande fall (sid 417):

»Es soll die Fläche vom kleinsten Inhalt bestimmt werden, welche begrenzt ist von drei Geraden, die sich in zwei Punkten schneiden, so dass die Fläche zwei Ecken in ihrer Begrenzung und einen ins Unendliche verlaufenden Sector besitzt.«

Genom tillsatsen »so dass die Fläche....«, som utgör en närmare bestämning på den sökta ytans form, begränsas problemet så, att man i det speciella fall, då de begränsande linierna äro parallela med koordinataxlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem, kommer till endast ett stycke af en skrufyta, således till endast ett af de fyra ytstycken, som framgå ur *Riemanns* allmännare formler (sid 307). Icke heller *G. Darboux* har fört lösningen af detta speciella problem vidare. (Leçons sur la théorie générale des surfaces, sid 483. Paris 1887).

Fattadt i största allmänhet är problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier som äro parallela med koordinataxlarna i ett rätvinkligt system, oändligt mångtydigt. Vid behandlingen af problemet måste således vissa inskränkningar göres.

Riemann uppställde, såsom redan framhölls, fordran att amplituden af en sektor, som sträcker sig i oändligheten och har karaktären af en skrufyta, bör hafva storleken $\frac{\pi}{2}$. Denna fordren kommer i det följande att upprätthållas.

Ehuru *Riemann* ej tagit i betraktande ytstycken, på hvilkas analytiska fortsättning en eller flere af de begränsande linierna blifva dubbellinier, så vill jag dock på förut framhållna skäl tillåta antagandet att, då ett eller två af afstånden A, B, C äro lika med noll, en eller flere af de begränsande linierna kunna uppträda såsom dubbellinier på ytstyckets analytiska fortsättning. Däremot upptagas ej de fall till behandling, i hvilka en eller flere af de begränsande linierna blifva flerfaldiga linier på ytstyckets analytiska fortsättning.

Enär ett af de ytstycken, till hvilka de *Riemann*'ska formlerna leda, har en sektor med en amplitud af storleken $2\cdot\frac{\pi}{2}$, hvarvid sektorns begränsning delvis bildas af två åt olika håll riktade delar af samma begränsande linie, så har vid det ifrågavarande speciella problemets behandling antagits, att de uppträdande sektorerna kunna hafva amplituden $2\cdot\frac{\pi}{2}$.

Under dessa antaganden har jag löst problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier *X*, *Y* och *Z*, af hvilka linien *Z* skär linierna *X* och *Y* under räta vinklar.

Undersökningen leder till det resultat, att de tre räta linierna bestämma icke mindre än *16* olika ytstycken, hvartill ännu strängt taget komma dessa ytors spegelbilder i ett af planen *ZX* eller *ZY*, betraktade såsom speglande plan. Bland dessa *16* ytstycken ingå de *4*, hvilka framgå ur *Riemann*'s formler. *Sex* af dessa ytstycken bestämmas genom de tre linierna med en och samma förknippning af liniernas oändligt aflägsna punkter

Prof. *H. A. Schwarz* torde vara den första som hänvändt uppmärksamheten på, att genom en och samma begränsning kan föras mer än ett minimalytstycke. Såsom exempel härpå betraktar Prof. *Schwarz* en sexhörning i rymden med två symmetriaxlar och visar, att genom densamma *tre* minimalytstycken äro bestämda.

Den analytiska behandlingen af de *12* nya ytstyckena, hvilka ej framgå ur *Riemanns* formler, försvåras genom den omständigheten, att de sfäriska bilderna af dessa ytor äro sammansatta antingen af 4, 5, 7, 9 eller 10 sfäriska oktanter, medan de sfäriska bilderna af de ytstycken, som framgå ur *Riemanns* formler, bildas af 1, 3, eller 5 oktanter.

Resultatet af den undersökning jag genomfört är följande.

Problemet att analytiskt bestämma ett minimalytstycke, hvars begränsning bildas af tre räta linier, af hvilka hvar och en står vinkelrät emot riktningarna af de två öfriga, leder under vissa begränsande antagande (sid 177), förutom till de genom *Riemann*'s formler bestämda ytstyckena, till följande antal nya grupper af ytstycken eller til följande antal nya ytstycken.

I) Är intet af afstånden *A*, *B*, *C* emellan de tre begränsande linierna lika med noll, så föres man till endast *en* ny grupp ytstycken, förutsatt att hvarje begränsande linie bör vara en enkel linie på ytstyckenas analytiska fortsättning. Ytstyckena i denna grupp äro s. k. *dubbelytor* och äro dubbeltsammanhängande-

II) Är ett af afstånden *A*, *B*, *C* lika med noll, så ledes man till *tre* nya grupper af ytstycken. På den analytiska fortsättningen af ytstyckena, hörande till två af grupperna, äro de begränsande linierna

enkla linier. Ytorna i den ena af dessa grupper äro *dubbelytor* med endast två sektorer af de resp. amplituderna $\frac{\pi}{2}$ och $2 \cdot \frac{\pi}{2}$. På den analytiska fortsättningen af ytstyckena, hörande til den tredje gruppen, äro *två* af de begränsande linierna *dubbellinier*.

III) Äro *två* af afstånden A, B, C lika med noll, så ledes man till *12* nya minimalytstycken eller inalles till *16* ytstycken genom samma tre räta linier. Af dessa ytstycken äro *10* så beskaffade, att de begränsande räta linierna äro *enkla* räta linier. På den analytiska fortsättningen af de öfriga *6* ytstyckena är antingen *en* eller ock äro *två* af de begränsande linierna *dubbellinier*.

OM KONVERGENSEN AF DE POINCARÉ'SKA Θ-SERIERNA I HUFVUDCIRKELFALLET.

AF

SEVERIN JOHANSSON.

1. I sin afhandling: *Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze*, Math. Ann., Bd. 41, pag. 1, (1892), har *Ritter* uppställt satsen, *att de Poincaré'ska serierna af dimensionen* — 2 *icke längre äro absolut konvergenta, om polygonnätet har en eller oändligt många gränskurvor.* Vidare hafva *Ritter* och *Burnside*[1]) funnit satsen, *att vid de hufvudcirkelgrupper, hvilkas polygonnät öfvertäcker hela planet och hvilkas gränspunkter sålunda icke ligga öfverallt tätt på hufvudcirkelns periferi, de Poincaré'ska serierna af dimensionen* — 2 *konvergera absolut och likformigt i hela nätet.*

Är

$$S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

en substitution inom en hufvudcirkelgrupp uti η-planet, så handlar det i de nämnda satserna om serien

$$(1) \qquad \sum \left|\frac{dS}{d\eta}\right| = \sum \frac{1}{|\gamma\eta + \delta|^2},$$

där summan utsträckes öfver alla substitutioner i hufvudcirkelgruppen.

Vid frågan om denna series konvergens komma enligt de nämnda satserna hufvudcirkelgrupperna att uppdelas i två typer, allteftersom

[1]) Se § 12 i *Ritters* afhandling i Math. Ann., Bd. 41, och *Burnside: On a class of automorphic functions*, Proceedings of the London Math. Soc., Nov. 1891.

hufvudcirkeln är en gränscirkel, öfver hvars periferi gruppen icke kan fortsättas, eller icke; i det förra fallet divergerar serien (1), i det senare är serien konvergent.

Då i det senare fallet gruppen allt ännu på själfva periferin af hufvudcirkeln är egentligt diskontinuerlig, medan i det förra fallet den egentliga diskontinuiteten upphör på sagda periferi, kunna vi också uttrycka saken så, att vi säga: Serien (1) är konvergent eller divergent beroende på, om hufvudcirkelgruppen är egentligt diskontinuerlig på periferin af hufvudcirkeln eller icke.

2. Dessa satser äro alla riktiga, sålänge det handlar om grupper med ett ändligt antal alstrande substitutioner. Men om vi betrakta också grupper med oändligt många alstrande, så förlorar det ofvan angifna konvergenskriteriet sin betydelse. Jag skall nämligen här ge exempel på grupper, *som ha hufvudcirkeln till verklig gränscirkel och sålunda icke längre äro på dess periferi egentligt diskontinuerliga, men vid hvilka trots det summan*

$$\sum \frac{1}{|\gamma \eta + \delta|^2}$$

konvergerar. Dessa grupper ha då oändligt många alstrande[1]).

3. För att erhålla ett sådant exempel, konstruerar jag en hufvudcirkelgrupp på följande sätt.

Vi tänka oss på periferin af enhetscirkeln en sluten (*abgeschlossen*) ingenstädes tät punktmängd Π_0. Denna mängd består som bekant af ändpunkterna af en numrerbar (*abzählbar*) mängd cirkelbågar δ_ν af denna periferi, hvilka sakna gemensamma punkter, och dessa ändpunkters hopningsställen.

Vi rita nu öfver alla de nämnda, från punkter i mängden Π_0 fria cirkelbågarna δ_ν ortogonalcirklar till enhetscirkeln och bekomma på så sätt oändligt många cirkelbågstvåhörningar, af hvilka enhvar begränsas af en båge δ_ν och den tillhörande ortogonalcirkeln. Om vi aflägsna alla dessa tvåhörningar ur enhetscirkelns yta, så återstår ett kontinuum A_0, hvilket vi vilja kalla en cirkelbågspolygon.

δ_{ν_0} må vara en godtycklig cirkelbåge δ_ν. Om vi spegla i den öfver δ_{ν_0} lagda ortogonalcirkeln, så uppstår såsom bild af mängden Π_0 på

[1]) Se min afhandling: *Zur Theorie der Konvergenz der Poincaré'schen Reihen bei den Hauptkreisgruppen* i Öfversigt af Finska Vetenskapssocietetens Förhandlingar Bd. LIII 1909—1910 Afd. A. No. 15.

bågen δ_{ν_0} en sluten, ingenstädes tät punktmängd Π_{ν_0}; mängden Π_{ν_0} har därvid ändpunkterna af bågen δ_{ν_0} gemensamma med Π_0 och består i öfrigt af ändpunkterna af vissa längs δ_{ν_0} liggande bågar $\delta_{\nu_0\nu}$ och deras hopningspunkter.

Till bågarna $\delta_{\nu_0\nu}$ drager jag åter ortogonalcirklar på samma sätt som till bågarna δ_ν. Det uppstår därigenom åter oändligt många cirkelbågstvåhörningar, hvilka alla tillhöra den af δ_{ν_0} och dess ortogonalcirkel begränsade tvåhörningen. Om vi ur denna sistnämnda tvåhörning aflägsna alla dessa oändligt många nya tvåhörningar, så återstår en cirkelbågspolygon A_{ν_0}. A_{ν_0} är då tydligen spegelbilden af A_0 i den öfver δ_{ν_0} dragna ortogonalcirkeln.

På samma sätt kunna vi nu i obegränsad följd åstadkomma nya spegelbilder, i det vi ständigt spegla vidare öfver »fria« ortogonalcirklar. Speglingsprocessen afvecklar sig fullkomligt lika som i det bekanta fallet, då A_0 begränsas af ett ändligt antal ortogonalcirklar till enhetscirkeln. Såsom slutresultat bekomma vi ett nät af cirkelbågspolygoner

$$A^{(0)} = A_0,\ A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots$$

och oändligt många slutna, ingenstädes täta punktmängder

$$\Pi^{(0)} = \Pi_0,\ \Pi^{(1)},\ \Pi^{(2)},\ \ldots,$$

af hvilka två olika högst ha två punkter gemensamma.

Polygonen $A^{(\nu)}$ når i punkterna, tillhörande mängden $\Pi^{(\nu)}$, ut till periferin af enhetscirkeln, men består i öfrigt uteslutande af punkter tillhörande det inre af enhetscirkeln. Polygonerna $A^{(\nu)}$ lagra sig invid hvarandra och deras sammanfattning öfvertäcker enhetscirkelns inre fullständigt en gång.

4. Ur de härmed definierade speglingarna bilda vi härefter på det kända sättet en grupp af lineära substitutioner. Vi strecka fördenskull vår utgångspolygon A_0. De genom spegling öfver A_0:s ränder uppkomna polygonerna A_ν lemna vi ostreckade; därpå strecka vi åter de ur A_ν genom spegling öfver de fria ränderna uppkomna polygonerna o. s. v. På sådant sätt blir slutligen hela vårt polygonnät sammansatt af turvis streckade och ostreckade polygoner, hvarvid af två invid hvarandra liggande polygoner den ena alltid är streckad, den andra ostreckad.

Betrakta vi därpå de operationer, som öfverföra sammanfattningen af alla streckade eller alla ostreckade områden i sig, så bilda dessa operationer en grupp, Γ, af lineära substitutioner.

Om A_{ν_0} är en godtycklig af de invid A_0 liggande polygonerna, så bildar tydligen polygonen

$$A_0 = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_{\nu_0}$$

ett fundamentalområde för gruppen Γ. Genom förmedling af substitutionerna i Γ uppstå ur A_0 oändligt många polygoner

$$A^{(0)} \equiv A_0,\ A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots,$$

hvilka öfvertäcka det inre af enhetscirkeln fullständigt en enda gång; hvarje $A^{(\nu)}$ består därvid af en streckad och en ostreckad polygon A.

Polygonen A_0 når ut till periferin af enhetscirkeln i alla punkter, tillhörande mängderna Π_0 och Π_{ν_0}, men består i öfrigt af punkter, tillhörande det inre af enhetscirkeln. Beteckna vi sammanfattningen af punktmängderna Π_0 och Π_{ν_0} med P_0, så är P_0 en ingenstädes tät sluten punktmängd. Ur P_0 uppstå genom förmedling af substitutionerna i gruppen Γ slutna, ingenstädes täta mängder

$$P^{(0)} \equiv P_0,\ P^{(1)},\ P^{(2)},\ \ldots,$$

af hvilka två olika högst ha två punkter gemensamma. Polygonen $A^{(\nu)}$ når i alla till $P^{(\nu)}$ hörande punkter ut till enhetscirkelns periferi, men består i öfrigt af idel till det inre af enhetscirkeln hörande punkter.

5. Punkterna på periferin af enhetscirkeln sönderfalla i två klasser: punkterna af första arten, som ligga under ändligt många ortogonalcirklar och punkterna af andra arten, hvilka ligga under oändligt många ortogonalcirklar. Punkterna af första arten äro helt enkelt de till någon af mängderna $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, ... hörande punkterna.

Såväl punkterna af första arten som de af andra arten ligga öfverallt tätt på enhetscirkelns periferi. Punktmängden $P^{(0)}$ har därvid den egenskapen, att hvarje punkt af första arten är eqvivalent med en punkt i $P^{(0)}$. Punktmängden $P^{(0)}$ spelar sålunda för gruppen Γ en analog roll på periferin af enhetscirkeln som fundamentalområdet i det tvådimensionala gebitet. Man kunde fördenskull möjligen kalla $P^{(0)}$ gruppen Γ:s *fundamentalmängd.*

Gruppen Γ *har tydligen enhetscirkeln till verklig gränscirkel.* Detta framgår helt enkelt däraf, att hvarje system i afseende å Γ eqvivalenta punkter i det inre af enhetscirkeln hopar sig mot hvarje punkt af andra arten och således öfverhufvudtaget mot hvarje punkt af enhetscirkelns periferi.

6. Punktmängden $P^{(0)}$ består af ändpunkterna af oändligt många cirkelbågar d_ν och deras hopningspunkter. Emedan cirkelbågarna d_ν sakna gemensamma punkter, så är

$$\sum_\nu{}' d_\nu \leqq 2\pi.$$

Vi ha således att särskilja mellan två möjligheter. Antingen är

$$\sum_\nu{}' d_\nu = 2\pi$$

eller

$$\sum_\nu{}' d_\nu < 2\pi.$$

Vi kalla dessa fall det *paraboliska* och det *hyperboliska* fallet.

Uttrycket

$$I^{(0)} = 2\pi - \sum_\nu{}' d_\nu$$

vilja vi kalla det längs enhetscirkelns periferi uppmätta *innehållet* af punktmängden $P^{(0)}$. De båda fallen skilja sig då så från hvarandra, att i det paraboliska fallet fundamentalmängden $P^{(0)}$ är utan innehåll d. v. s. har innehållet noll, medan i det hyperboliska fallet fundamentalmängden $P^{(0)}$ har ett från noll skildt innehåll.

7. I det jag förbehåller mig att senare återkomma till det paraboliska fallet, bevisar jag här följande sats[1]:

Vid alla hufvudcirkelgrupper af hyperbolisk typ konvergera de Poincaré'ska serierna af dimensionen — 2.

Γ må alltså vara en grupp af hyperbolisk typ; dess substitutioner må vara $S^{(\mu)}\eta$. Emedan $S^{(\mu)}\eta$ betyder en förskjutning af enhetscirkeln i sig, så har $S^{(\mu)}\eta$ formen

$$S^{(\mu)}\eta = \frac{\delta^{(\mu)}\eta + \bar{\gamma}^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}\eta + \bar{\delta}^{(\mu)}},$$

där $\bar{\delta}^{(\mu)}$ och $\bar{\gamma}^{(\mu)}$ äro de konjugerade talen till $\delta^{(\mu)}$ och $\gamma^{(\mu)}$; därvid är

$$|\delta^{(\mu)}|^2 - |\gamma^{(\mu)}|^2 = 1.$$

[1]) Denna sats innesluter i sig den af *Ritter* och *Burnside* funna satsen, ty vid de af dem betraktade grupperna innehåller $P^{(0)}$ ett ändligt antal kontinua (cirkelbågar) och har följaktligen ett från noll skildt innehåll.

Det gäller att bevisa, att serien

$$(2) \qquad \sum_{\mu}' \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

konvergerar.

Nu är

$$S^{(\mu)}\left(-\frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}}\right) = \infty$$

eller alltså

$$-\frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}} = S^{(\mu)^{-1}}(\infty).$$

Punkterna

$$-\frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}}$$

äro följaktligen eqvivalenta med den oändligt aflägsna punkten och ligga alltså utom enhetscirkelns periferi. Då vidare alla dessa punkter ligga i det ändliga, kan man med nollpunkten såsom medelpunkt slå en så stor cirkel, att de alla ligga inom denna cirkel; dess radie må vara R. Vidare må $r < 1$. Då är för $|\eta| \leqq r$

$$R + r > \left|\eta + \frac{\delta^{(\mu)}}{\gamma^{(\mu)}}\right| > 1 - r$$

eller

$$(3) \qquad \frac{1}{(1-r)^2}\cdot\frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2} > \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2} > \frac{1}{(R+r)^2}\cdot\frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}$$

Följaktligen konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{\mu}' \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

för alla punkter i det inre af enhetscirkeln samtidigt med serien

$$(4) \qquad \sum_{\mu}' \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Vår uppgift är numera att ådagalägga, att sistnämnda serie konvergerar i det hyperboliska fallet.

8. För alla punkter af enhetscirkeln och således också för punkterna på periferin gäller enligt (3) olikheten

(5) $$\frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2} > \frac{1}{(R+1)^2} \cdot \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Är då $m^{(\mu)}$ det minsta värdet af

$$\frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

på periferin af enhetscirkeln, så gäller olikheten

(6) $$m^{(\mu)} > \frac{1}{(R+1)^2} \cdot \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Numera betrakta vi på periferin af enhetscirkeln punktmängderna $P^{(0)}$ och $P^{(\mu)}$, som uppkommer ur $P^{(0)}$ genom förmedling af $S^{(\mu)}$.

Till mängden $P^{(0)}$ höra cirkelbågarna

$$d_1, \ d_2, \ \ldots.$$

och till mängden $P^{(\mu)}$ på alldeles samma sätt bågarna

$$d_1^{(\mu)}, \ d_2^{(\mu)}, \ \ldots.$$

Är $I^{(0)}$ innehållet af $P^{(0)}$ och $I^{(\mu)}$ innehållet af $P^{(\mu)}$, så är

$$I^{(0)} = 2\pi - \sum_{\nu}{}' d_\nu$$

och

$$I^{(\mu)} = 2\pi - \sum_{\nu}{}' d_\nu^{(\mu)}.$$

Cirkelbågarna $d_\nu^{(\mu)}$ uppstå ur cirkelbågarna d_ν genom förmedling af substitutionen $S^{(\mu)}$. Vi kunna tänka oss de båda serierna af cirkelbågar så ordnade, att $d_\nu^{(\mu)}$ är afbilden af d_ν.

Är nu n ett godtyckligt positivt helt tal, så framställer uttrycket

$$2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}{}' d_\nu$$

totallängden af vissa på enhetscirkelns periferi liggande bågar. Om vi på dessa bågar använda substitutionen $S^{(\mu)}$, så uppkomma bågar, hvilkas totallängd är

$$2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu^{(\mu)}.$$

Då består olikheten

$$2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu'^{(\mu)} > m^{(\mu)} \cdot \left(2\pi - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\nu\right).$$

Då denna olikhet gäller för alla värden på n, så framgår härur, att

(7) $$I^{(\mu)} > m_\mu \cdot I^{(0)}.$$

9. Om N är ett godtyckligt positivt helt tal, så är föreningsmängden af mängderna

$$P^{(0)},\ P^{(1)},\ \ldots,\ P^{(N)}$$

åter en sluten ingenstädes tät mängd af punkter på enhetscirkelns periferi. Denna mängd tillkommer alltså på samma sätt som de enskilda punktmängderna $P^{(\mu)}$ ett bestämdt längs periferin uppmätt innehåll. Då emellertid de ofvan angifna mängderna ha högst två punkter parvis gemensamma, så är detta innehåll lika med

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=N} I^{(\mu)}.$$

Då å andra sidan det betraktade innehållet är mindre än 2π, så följer, att

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=N} I^{(\mu)} < 2\pi.$$

Då denna olikhet gäller för alla värden på N, så följer härur, att serien

(8) $$\sum_\mu I^{(\mu)}$$

konvergerar.

Ur konvergensen af (8) sluta vi emellertid med tillhjälp af (7), att serien

$$\sum_\mu m^{(\mu)}$$

konvergerar. Följaktligen konvergerar enligt (6) också serien

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}|^2}.$$

Men detta innebär enligt (3), *att den Poincaré'ska serien af dimensionen* — 2

$$\sum_{\mu} \frac{1}{|\gamma^{(\mu)}\eta + \delta^{(\mu)}|^2}$$

konvergerar för $|\eta| < 1$. Härmed är satsen bevisad.

INDHOLDSFORTEGNELSE